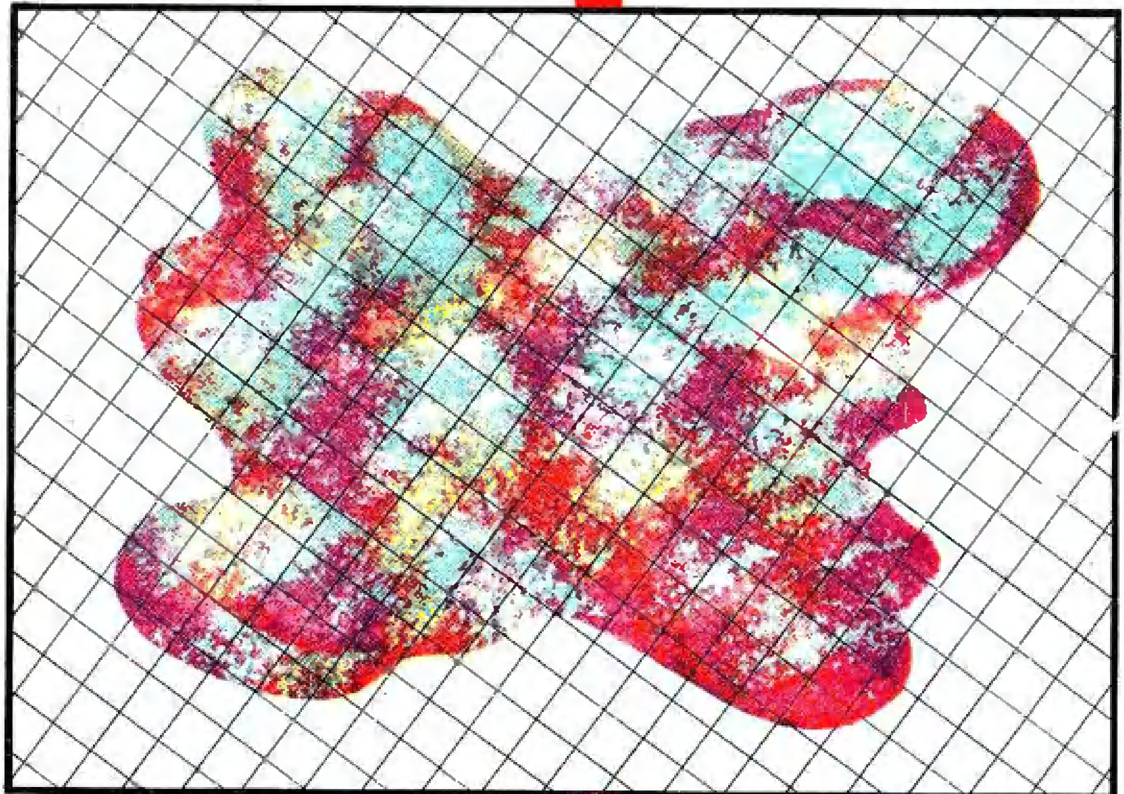
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Измерение площадей

1991

Квант

7 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Как измерить площадь этой красивой замысловатой фигуры? (см. «Калейдоскоп»)*
2 *Этот дровосек с картины Казимира Малевича занят разбиением больших геометрических фигур на маленькие кусочки. Как решить подобную задачу без помощи топора, вы можете узнать из статьи на с. 13.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Японская головоломка — 6 розеток для варенья.*

ЧТО СЕГОДНЯ В ФИЗИКЕ И АСТРОФИЗИКЕ ОСОБЕННО ВАЖНО И ИНТЕРЕСНО?

Академик В. ГИНЗБУРГ

В прошлом году в майском номере журнала «Physics Today» («Физика сегодня»), который выпускает Американское Физическое Общество, была опубликована статья советского физика академика Виталия Лазаревича Гинзбурга. Статья называлась «Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными?». Надеемся, что эта статья окажется полезной и интересной вам — нашим читателям, особенно школьникам. Вот почему мы и предлагаем ее вашему вниманию (с небольшими изменениями). Не пугайтесь, если некоторые термины и выражения будут вам сейчас непонятны. «Портрет» современной физики, написанный известным ученым, непременно останется в памяти и — кто знает? — возможно, повлияет на выбор вашего научного направления.

Вероятно, многие обращали внимание на узость горизонта большинства даже способных молодых физиков. Такой физик может знать тонкости в некоторой трудной и сложной области, скажем в квантовой теории поля. Но на вопросы, какова природа сверхпроводимости или ферроэлектричества, каково строение нейтронной звезды или как можно надеяться детектировать гравитационные волны, ответа вы не получите. Между тем, чтобы иметь представление обо всем этом и многом другом, вовсе не нужно потратить много времени и сил. Кроме того, вряд ли нужно доказывать, что широта взглядов и информированность не только естественны (ведь физика так интересна!), но и очень важны для успеха в работе, т. е. к этим широте и информированности должны стремиться даже чистые прагматики. Здесь нет места обсуждать причины отмеченной ситуации и общие пути ее изменения. Скажу только, что для достижения последней цели я организовал и читал специальные дополнительные лекции для студентов, а в 1971 году опубликовал статью [1]*), где было перечислено около 20 проблем, которые казались мне в то время особенно «горячими». В отношении каждого вопроса (проблемы) делались краткие пояснения (суть дела, неясные моменты и т. п.) и приводилась литература. Поскольку я рассчитывал, в основном, на молодое поколение, то довольно подробно пояснил то, что зрелому человеку и так совершенно очевидно. Именно, настоятельно подчеркивал условность и субъективность любого списка «наиболее важных и интересных проблем» и несомненную невозможность заниматься только такими проблемами. Вместе с тем, я убежден, что целый ряд проблем и вопросов действительно выделен по многим причинам — в силу их потенциальной важности для техники, особой загадочности и т. д. и т. п. Кроме того, всего объять невозможно, и для целей образования и расширения кругозора просто неизбежно выделение какого-то ограниченного круга вопросов.

Как отнеслись к моей статье [1] и ее последующим переработанным изданиям молодые физики, я и до сих пор не знаю. А вот коллеги встретили статью в общем без энтузиазма. Не буду перечислять услышанные упреки. А среди неуслышанных, несомненно, был и такой: в списке проблем нет той, которой занимается критикующий, «отсюда очевидно», что список плох. Помню, один мой старший друг сказал: «Если бы Вы опубликовали статью до того, как бы-

*) Здесь и далее в скобках указан номер материала в списке литературы, приведенном в конце статьи. *(Примеч. ред.)*

ли выбраны в Академию наук СССР, то никогда не стали бы академиком». Возможно, что он был прав. Так или иначе, я был до какой-то степени увлечен составлением и обсуждением своего «списка». Поэтому статья [1] превратилась в небольшую книжку, переведенную затем на ряд языков. Ее последнее (в составе более широкого сборника статей) издание вышло в 1985 году [2]. Сейчас подготовлено новое русское издание этого сборника (надеюсь, книга появится в 1991 году). Каждый раз текст изменялся и дополнялся, что было необходимо, но имело и свои отрицательные стороны.

Мой список «особенно важных и интересных проблем» сейчас таков:

Макрофизика

1. Управляемый ядерный синтез
2. Высокотемпературная сверхпроводимость. Сверхдиамагнетизм
3. Новые вещества (проблема создания металлического водорода и некоторых других веществ)
4. Некоторые проблемы физики твердого тела
5. Фазовые переходы второго рода и близкие к ним переходы (критические явления). Интересные примеры таких переходов
6. Физика поверхности
7. Жидкие кристаллы. Изучение очень больших молекул
8. Поведение вещества в сверхсильных магнитных полях
9. Разеры, гразеры и сверхмощные лазеры
10. Сильнонелинейные явления (нелинейная физика). Солитоны. Хаос. Странные аттракторы. Турбулентность
11. Сверхтяжелые элементы (далекие трансураны). «Экзотические ядра»

Микрофизика

12. Спектр масс. Кварки и глюоны. Квантовая хромодинамика
13. Единая теория слабого и электромагнитного взаимодействия. $W^{\pm}$- и Z^0-бозоны. Лептоны
14. Великое объединение. Распад протона. Масса нейтрино. Магнитные монополи. Суперобъединение. Суперструны
15. Фундаментальная длина. Взаимодействие частиц при высоких и сверхвысоких энергиях
16. Несохранение CP-инвариантности. Нелинейные явления в вакууме и в сверхсильных магнитных полях. Фазовые переходы в вакууме

Астрофизика

17. Экспериментальная проверка общей теории относительности
18. Гравитационные волны
19. Космологическая проблема. Связь между космологией и физикой высоких энергий
20. Нейтронные звезды и пульсары
21. Черные дыры
22. Квазары и ядра галактик. Образование галактик. Проблема скрытой массы (темной материи) и ее детектирования
23. Происхождение космических лучей и космического рентгеновского и гамма-излучения. Гамма-астрономия сверхвысоких энергий
24. Нейтринная астрономия

В общем, как можно думать, названия тем говорят сами за себя. Лишь тему 4 стоит расшифровать. Сюда можно было бы отнести, например, вопрос о металлической экситонной (электронно-дырочной) жидкости, он фигурировал в моих предыдущих списках. Уместно в рамках этой же темы упомянуть об актуальных сейчас проблемах: переходах металл — диэлектрик, волнах зарядовой и спиновой плотности, о неупорядоченных полупроводниках, спиновых стеклах, квантовом эффекте Холла, мезоскопике и др. Вообще, проблем и задач в физике твердого тела так много, что вряд ли можно все их даже перечислить в таком списке. Разумеется, с течением времени содержание тем изменяется, некоторые из них должны быть исключены из списка, а другие добавлены. Так, проблема высокотемпературной сверхпроводимости фигурировала еще в списке 1971 года [1],

(Окончание см. на с. 25)

ЭЛЕКТРЕТЫ — ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ МАГНИТОВ

Доктор технических наук
Г. ЕФАШКИН

О биоэлектретах

В начале статьи мы сказали, что в природе электреты не встречаются. Однако это не совсем так. Оказывается, живой организм человека или животного использует электретный эффект. Исследования ученых показали, что существуют биоэлектреты. Внутренние стенки кровеносных сосудов несут связанный отрицательный заряд. Потенциал, создаваемый биоэлектретами, медики назвали дзета-потенциалом. Элементы крови — эритроциты, тромбоциты, лейкоциты — также заряжены отрицательно. Возможно, этим объясняется тот факт, что кровь, несмотря на ее огромный молекулярный вес, легко проходит по тончайшим капиллярам.

Как только дзета-потенциал исчезает (из-за болезни, повреждения сосуда), кровь сворачивается, образуется тромб. Так работает защита организма. (Растворимый фибриноген крови переходит в нерастворимое состояние, образует множество нитей, в которых запутываются форменные элементы крови, ранка затягивается, образуется пробка, препятствующая дальнейшему вытеканию крови из сосуда.)

С другой стороны, образование тромбов внутри сосудов часто приводит к серьезному заболеванию — тромбофлебиту, вена забивается сгустком крови, сосуды раздуваются и под кожей бывают видны вздутые, явно больные вены.

Уже давно делают искусственные сосуды — протезы кровеносных сосудов (рис. 1). Их ткут, как чулки, и делают гофрированными. В случае серьезного заболевания пораженные сосуды заменяют протезами.

Но так как искусственный сосуд — чужеродное тело и не несет дзета-потенциала, то на его стенках образуются тромбы.

Оказывается, с помощью электретов можно смоделировать дзета-потенциал. В Институте трансплантологии искусственных органов и тканей была проведена серия экспериментов вне организма (как говорят медики, in vitro), а затем и на подопытных собачках (in vivo).

Вместо сосуда была в одном случае вшита трубочка, на внутренней стороне которой отрицательным электретным зарядом моделировался дзета-потенциал, во втором случае — трубочка без заряда, в третьем — с положительным зарядом. Трубочка (искусственный сосуд) с положительным зарядом через три дня полностью забилась тромбом, без заряда — не забивалась десять дней. В трубочке с моделированным дзета-потенциалом тромб не образовывался совсем.

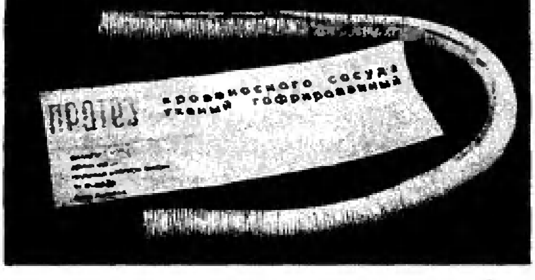


Рис. 1. Протез кровеносного сосуда.

Начало статьи опубликовано в предыдущем номере журнала.

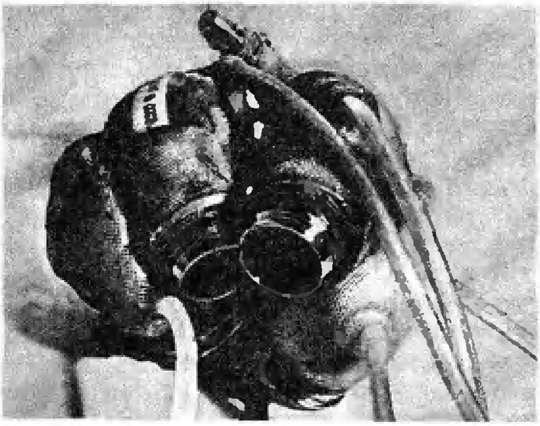


Рис. 2. Советская модель искусственного сердца.

Проблема предотвращения тромбообразования — одна из многих проблем, возникающих при создании искусственного сердца (рис. 2). На внутренней поверхности искусственного сердца необходимо моделировать дзета-потенциал.

Электреты в технике

Ранее считалось, что вода (или другая жидкость) полностью экранирует поле электрета. Выяснилось, однако, что поле полностью экранируется водой только в том случае, когда слой жидкости неподвижен. При движении жидкости по поверхности электрета поле экранируется не полностью, жидкость поляризуется, происходит разделение зарядов. Важно, чтобы слой текущей жидкости находился в пределах ТП-слоя электрета. А если при этом жидкость распылять, то образуются заряженные капельки жидкости. Поле электрета преобразует энергию струи жидкости в энергию заряженных капель, так же как в микрофоне энергия колебаний мембраны преобразуется в электрический сигнал.

На этом принципе была создана электретная форсунка (рис. 3). Без внешних источников питания вода, распыляясь форсункой, дает факел с большим количеством заряженных капель. На фотографии виден электрет на внутренней поверхности форсунки.

Если сделать форсунку без электрета, то в факеле будет 3—5 % заряженных капель. Электретная форсунка дает в 10—15 раз больше. Заряженные капельки воды энергично захватывают пыль из воздуха. Поэтому электретные форсунки используют в угольных шахтах, где много пыли. Орошение запыленного воздуха вблизи угольных комбайнов подавляет угольную пыль, не дает ей возможности распространяться по всему объему забоя. При этом существенно улучшаются условия труда шахтеров. Кроме того, подавляя угольную пыль, снижают опасность ее взрыва.

Если изменить знак заряда электрета на форсунке, то можно заставить ее работать в обращенном режиме, т. е. гасить заряды капель распыляемой жидкости. При распылении, например, бензина или другого взрывоопасного топлива, можно таким способом предотвращать самопроизвольное возгорание или взрыв топлива от статического электричества.

Небольшие замкнутые объемы воздуха можно полностью очистить от пылинок с помощью пленок электрета с дискретным поверхностным зарядом, которые наклеивают на стенки объема. Если свернуть электрет в рулон с зазором, равным ТП-слою, и снабдить его миниатюрным вентилятором для циркуляции воздуха, он будет способен обеспылить уже значительно бо́льшие объемы. Первое устройство называют локальным пы-

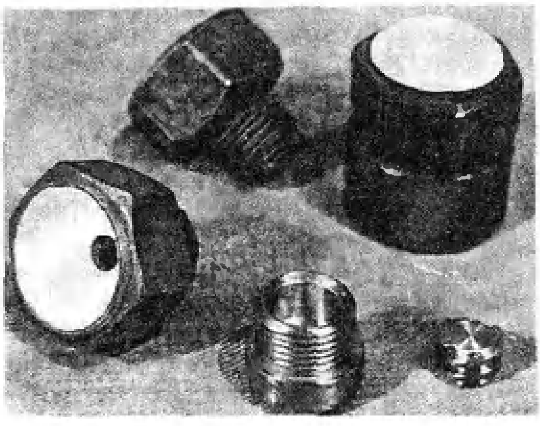


Рис. 3. Электретные форсунки.

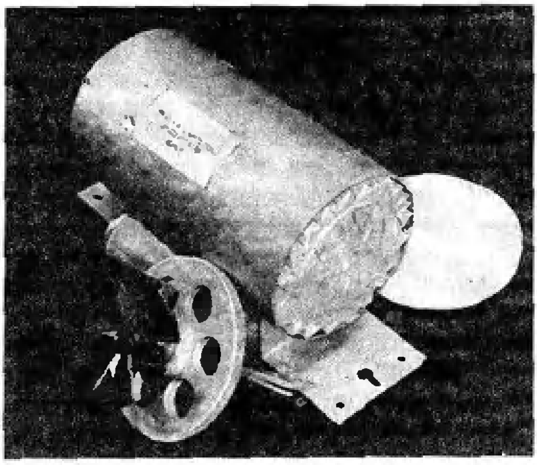


Рис. 4. Местный электретный рециркулятор МЭР-1.

леуловителем, второе — местным рециркулятором (рис. 4).

Проблема получения сверхчистой атмосферы является важной для предприятий микроэлектронного производства, где одна пылинка размером в доли микрона способна вывести из строя сверхбольшую или большую интегральную схему (СБИС или БИС). Поэтому затрачивают огромные средства на создание чистых помещений. Воздух фильтруется через многоступенчатую систему очистки воздуха, которая занимает целые этажи (так называемые технологические этажи).

А требования к чистоте все время повышаются. Если раньше можно было работать при классе чистоты 1000 (1000 пылинок на кубический фут, или 30 пылинок на литр) (сравните, в сельской местности, где мы говорим: «Ах, какой чистый воздух!», содержится порядка 100 000 пылинок на литр), то в настоящее время число пылинок не должно превышать 3-х на литр (класс 100) или даже 0,3 (класс 10). Да и пылинки не должны быть больше 0,3 микрона.

Может ли многоступенчатая система очистки воздуха справиться с такой задачей? В принципе — да, но на очень короткий срок. Дело в том, что очищенный воздух вновь быстро запыляется, так как в цехе находятся работающие механизмы, а самое главное — люди, которые «генерируют» пыль (человек «генерирует» полтора миллиона пылинок в час). Сотрудников пропускают через тамбуры, где сдувают пылинки, одевают в чистейшую одежду из специальных тканей, а иногда даже в скафандры, как космонавтов, но и это не решает проблемы.

В чем же выход? Один из вариантов — улавливать пыль в местах ее генерации локальными электретными пылеуловителями и рециркуляторами. Такой воздух, очищенный в технологических этажах, будет загрязняться гораздо медленнее.

Чистая атмосфера нужна не только в электронной промышленности. Очень вредна радиоактивная пыль на урановых рудниках, на атомных электростанциях. Абсолютно чистый воздух нужен при хирургических операциях, в оптических лабораториях, на космических кораблях. Электретные локальные пылеуловители без внешних источников питания помогут решить эти важные проблемы.

Электретные форсунки имеют множество других применений. Опрыскивая сельскохозяйственные культуры заряженной водой, повышают их урожайность и сокращают расход опасных ядохимикатов. Распыляя топливо в двигателях, снижают его расход, повышают мощность двигателей, уменьшают токсичность выхлопных газов...

Наверное, у читателя возник вопрос: почему магниты известны всем, а об электретах говорят только в узком кругу специалистов? Я думаю, что, во-первых, электреты изучаются сравнительно недавно, а поэтому даже в специальной литературе публикаций об электретах сравнительно немного; во-вторых, в школьном учебнике и даже в учебниках для вузов об электретах практически ничего не говорится.

А перспективы электретов огромны.

Приложение

Как мы уже сказали, простейший электрет — трибоэлектрет — получают трением. Из трибоэлектрета можно изготовить простой наушник, который без всяких преобразователей и усилителей будет воспроизводить программу местного радиовещания.

Для этого нужна фторопластовая или лавсановая пленка толщиной 10—30 микрон. Пленки эти в настоящее время широко распространены. Фторопластовые пленки используют при изготовлении емких конденсаторов, где они служат изолирующей прокладкой вместо парафинированной бумаги. А лавсановая пленка используется в быту для оберток цветов или коробок конфет. Нужна также бытовая алюминиевая фольга. Если ее под рукой нет, можно взять обертку из-под шоколада.

Нужны еще две чистые сухие шерстяные тряпочки, небольшой кусок наждачной бумаги и два тонких провода.

Электрет изготовить просто. Вырежьте прямоугольный кусок пленки любого размера, ну, скажем, 10×5 см. Расстелите пленку на шерстяной ткани. А сверху минуты три-четыре потрите пленку второй шерстяной тканью, желательно в одном направлении. При этом сильно нажимать не нужно. Под действием статического заряда в пленке будут происходить сложные процессы поляризации и образования электрета.

Из фольги изготовьте прямоугольные электроды. Ширина прямоугольника должна быть немного меньше ширины пленки, например 4 см, а длина — 11 см. Фольгу положите на наждачную бумагу и ребром ладони с небольшим усилием проведите по поверхности фольги так, чтобы от наждачной бумаги фольга стала шероховатой. То же самое нужно сделать со второй фольгой.

На фольгу укладывается электрет так, чтобы его края выходили за края фольги с трех сторон (рис. 5). На электрет укладывается вторая фольга. Получилась трехслойная широкая лента, длинные края которой необходимо скрепить липкой лентой или лейкопластырем. Ленточный электретный приемник готов. К выступающим

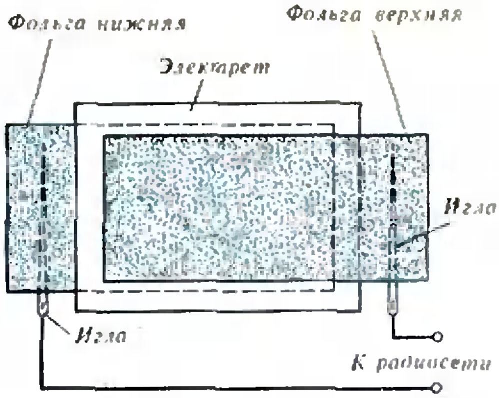
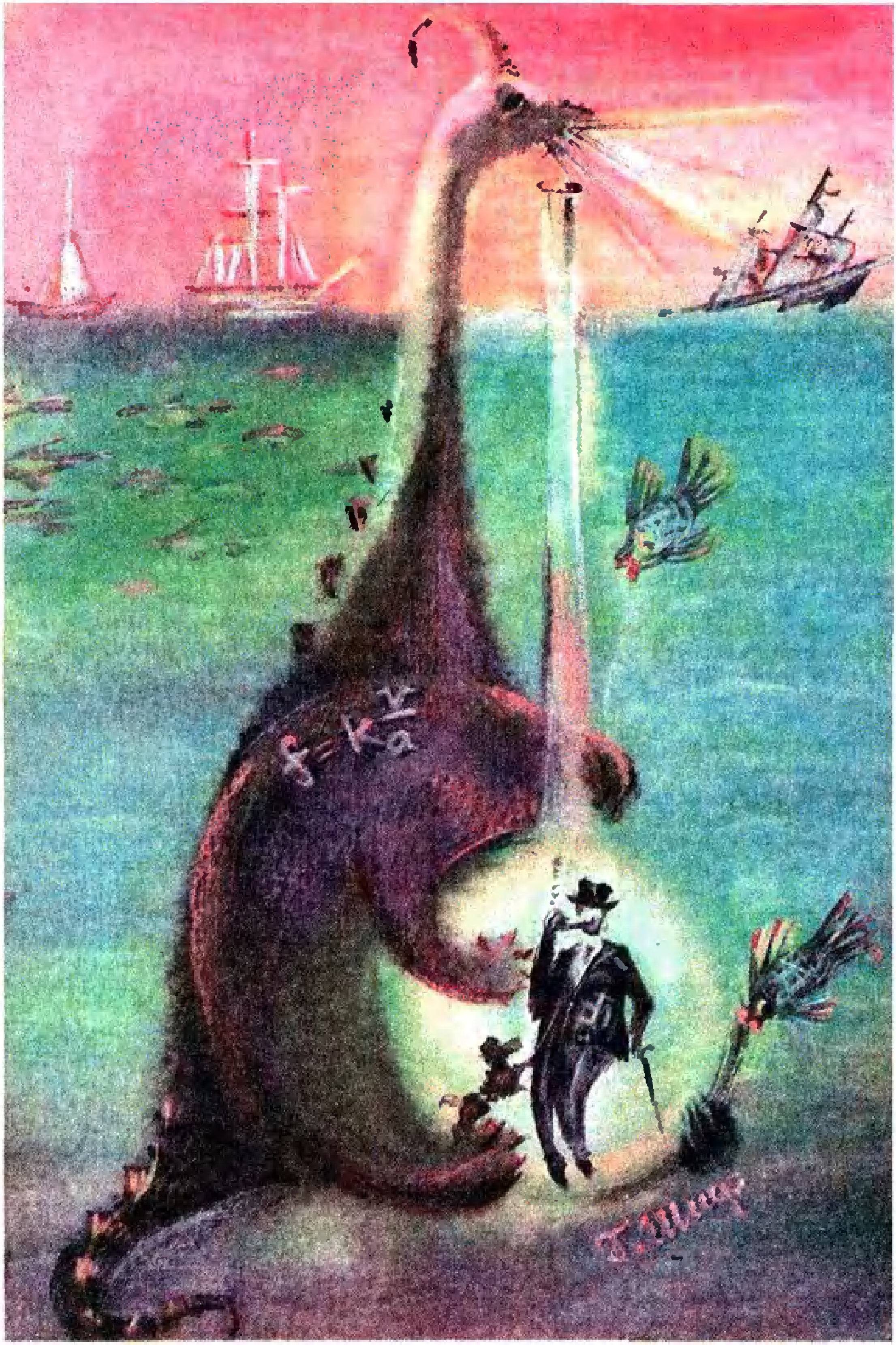


Рис. 5. Действующий макет электретного приемника ленточного типа.

краям-электродам необходимо прикрепить провода. В простейшем варианте это можно сделать с помощью обычных иголок.

Включив эту предельно простую систему в радиосеть и прижав к уху, вы услышите чистое звучание мелодии или голос диктора.

Если сделать потщательнее два приемника, закрепив трехслойную ленту в рамке или между двумя тонкими пластинами диэлектрика, например плексигласа, в котором аккуратно просверлить акустические отверстия, как у телефонной трубки, и скрепить гибкой дужкой, получатся наушники, с помощью которых можно слушать, не мешая близким, передачу радиосети, телевизионную программу или магнитофон.



О ВОДЯНОМ ЗВЕРЕ И АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

Кандидат технических наук
Р. ВИНОКУР

— Это произошло в V веке нашей эры на берегах глубокого озера на севере Англии. Странствующий монах отец Бенедикт пришел сюда, чтобы обратить местных жителей в христианство. Однако оказалось, что у них уже есть свой бог — могучий обитатель озера. Монаха отвели на невысокую скалу, круто обрывающуюся в воду. Услышав голоса людей, из пучины вынырнуло огромное блестяще-черное чудовище, голова которого по форме напоминала тюленью и была украшена белым рогом. Аборигены выглядели очень испуганными, хотя уверяли, что водяной бог мяса не ест, а питается только растительностью. Зверь молча смотрел на людей, его голова почти достигала края скалы. Местные жители попадали ниц. Тогда монах поднял крест и именем божьим повелел чудищу убираться назад в преисподнюю, но это не возымело действия. В ту пору проповедники владели не только словом, но и оружием. Подхватив с земли копье, оброненное одним из местных жителей, отец Бенедикт метко бросил его и поразил зверя в глаз. Чудище застонало, подалось назад и навеки скрылось в глубинах озера...

Рассказчик, молодой человек по имени Джон Стайрон, помолчал и, взглянув на Шерлока Холмса, добавил: — Такова легенда. Однако многие верят, что подобный зверь и поныне живет в нашем озере, а некоторые говорят, что видели его.

— И вы, наверное, тоже верите в живучесть водяного великана и ищете встречи с ним? — улыбнулся знаменитый сыщик.— Впрочем, доктор Уотсон как-то передал мне рассказ своего бывшего сослуживца, побывавшего в Камеруне и утверждающего, что тамошние охотники неоднократно встречались с подобными животными и называют их «мокеле — мбембе». Судя по всему, это — дожившие до нашего времени первобытные ящеры. Кстати, молодой малый пудель черной масти с удовольствием поможет хозяину в поисках.

— Ваша проницательность обнадеживает,— удивленно воскликнул гость,— но где вы могли видеть мою собаку Джуди?

— На каблуках ваших ботинок я заметил следы зубов, а это — обычное дело, если дома живет щенок. Кроме того, я случайно видел из окна, как недалеко от нашего дома вы загляделись на малого черного пуделя и практически не обратили внимания на множество других собак, прогуливающихся в это время со своими хозяевами по Бейкер-стрит. Однако в чем вам нужна моя помощь?

— Я ищу водяного зверя и, не надеясь на случайную встречу на поверхности воды, хочу проникнуть в глубины озера. По моему заказу на заводе был изготовлен подводный дом в виде полой стальной сферы с цилиндрической трубой.— Стайрон взял карандаш и нарисовал эскиз (рис. 1).— В прочных стенках сферы есть иллюминаторы и герметичная входная дверь. Дом был доставлен на берег озера, где монтаж следовало закончить: пропустить через трубу шланги для воздушной вентиляции и телефонные провода для связи. Подводный дом предполагалось затем с

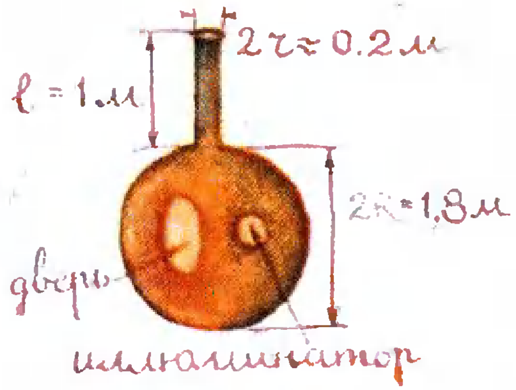


Рис. 1.

помощью системы тросов и парового катера отбуксировать от берега и осуществить его погружение. Однако монтажные работы пришлось неожиданно прекратить: плохо почувствовали себя рабочие, которые должны были завести шланги и провода в трубу и затем загерметизировать оставшиеся щели. Они утверждали, что с домом не все в порядке: там поселился нечистый. Тогда я сказал, что закроюсь в доме на час и ничего не случится. Стоял ясный теплый день, в небе обнадеживающе сияло солнце, с озера дул легкий приятный ветер. Джуди упорно не пускала меня в дом, цепляясь лапами и зубами за брюки. Я отодвинул ее и заперся в доме. Почти сразу я ощутил, как внутри меня все задрожало, потемнело в глазах, возник какой-то непонятный страх. Я не выдержал и выскочил из дома. Впоследствии я несколько раз повторял свою попытку, но с тем же результатом... Сэр, я надеюсь на вас и на ваш дедуктивный метод. Помогите мне, если, конечно, здесь не замешаны сверхъестественные силы.

— До сих пор ни бог, ни дьявол не вставали на моем пути,— задумчиво сказал Холмс.— Думаю, что и водяной зверь здесь ни при чем, а причина страхов лежит в неживой природе. С подобным случаем я уже сталкивался, когда расследовал дело о гибели охотника, укрывавшегося от непогоды в небольшой пещере. В этом мне помог тогда один известный профессор физики...

Холмс достал из кармана миниатюрную игрушку из тонкого разноцветного стекла, очень напоминающую по форме подводный дом Стайрона, поднес ее ко рту и подул поперек горлышка (рис. 2). После нескольких попыток он добился того, что раздался протяжный гудящий свист. Я перехватил недоуменный взгляд гостя, и мне стало неловко за моего друга, который, казалось, впал в детство. Холмс между тем стал объяснять.

— То, что я держу в руках, физики могли бы назвать резонатором Гельмгольца. Такова фамилия ученого, который впервые применил резонаторы для анализа звуков по частоте колебаний. Это устройство состоит из двух основных элементов: узкой трубки, открытой с обоих концов, и гораздо большего по объему сосуда. Изменение давления воздуха у наружного конца трубки вызывает движение воздушной среды внутри резонатора. Поскольку в узком месте скорость потока воздуха намного выше, чем в широком, основная кинетическая энергия среды сосредоточена в трубке. С другой стороны, приток воздуха в сосуд приводит к увеличению давления в нем, что препятствует дальнейшему поступлению воздуха извне в резонатор. Аналогично, отток воздуха из сосуда вызывает уменьшение давления воздуха в сосуде, что порождает силу, мешающую оттоку воздуха. Значит, воздух внутри сосуда

Рис. 2.

можно рассматривать как пружину, а воздух внутри трубки — как материальную точку. В этом смысле резонатор Гельмгольца подобен пружинному маятнику. Следует заметить, что такая аналогия приемлема не всегда, а только при условии, что скорость частиц воздуха по всей длине трубки и давление воздуха во всех точках сосуда соответственно примерно одинаковы. Это имеет место на достаточно низких частотах, когда длина звуковой волны в воздухе намного больше размеров резонатора.

— А кстати,— поинтересовался я,— какова же собственная частота колебаний такого, с позволения сказать, акустического маятника?

— Мой дорогой Уотсон, я постараюсь сразу удовлетворить вашу любознательность, не прибегая к промежуточным выкладкам,— ответил Холмс.— Если длина трубки l намного больше ее поперечных размеров, то собственная частота резонатора

$$f_c = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{Vl}}, \qquad (1)$$

где $c \approx 340$ м/с — скорость распространения звука в воздухе, S — площадь поперечного сечения трубки, V — объем сосуда*). Подводный дом, сконструированный нашим гостем, также можно считать резонатором Гельмгольца. Исходя из тех размеров, что проставлены на эскизе (см. рис. 1), и используя формулу (1), находим

$$f_c \approx 5 \text{ Гц}.$$

— Кажется, я начинаю понимать,— неуверенно проговорил Стайрон.— Игрушка засвистела после того, как вы подули поперек ее горлышка. В моем случае эту роль сыграл ветер, не так ли?

— Совершенно верно,— подтвердил Холмс.— Когда поток воздуха обтекает препятствие, в нем возникают завихрения. Если начальные направление и скорость потока являются постоянными, то образуется периодическая последовательность движущихся вихрей. Давление воздуха внутри вихрей меньше, чем в промежутках между ними (не зря смерчи и водовороты затягивают в себя расположенные рядом предметы), поэтому на препятствие действует переменная сила, частоту которой можно оценить, исходя из соображений размерности:

$$f = k\frac{v}{a}, \qquad (2)$$

где v — скорость набегающего потока воздуха, a — характерный размер препятствия, k — безразмерный коэффициент, зависящий от формы препятствия и его расположения относительно потока. Экспериментально установлено, например, что если поток направлен перпендикулярно цилиндру большой длины и радиуса r, то в формуле (2) следует принимать $a=2r$ и $k=0{,}2$. Полагая, что скорость ветра составляла ≈ 5 м/с (при этом ветер еще ощущается как слабый), и подставляя необходимые значения, получаем

$$f \approx 5 \text{ Гц}.$$

Конечно, в данном случае могли возникнуть и колебания другой частоты, ведь роль препятствия играла не только труба в целом, но и края ее внешнего отверстия. Здесь также можно воспользоваться формулой (2), однако в качестве параметра a задать толщину стенок трубы. Вопрос оставался бы лишь в том, каково соответствующее значение безразмерного коэффициента k. Однако в данном случае роль трубы в целом, по-видимому, значительнее.

— Итак, $f=f_c$. Это означает, что имеет место резонанс, поэтому амплитуда колебаний давления воздуха внутри дома могла быть очень большой,— догадался Стайрон.— По этой же причине звучала елочная игрушка.

— И не только игрушка,— добавил Холмс.— В духовых музыкальных инструментах используется то же физическое явление, только для усиле-

*) Вывод этой формулы вы можете найти, например, в статье «Домовой, колдун и... резонатор Гельмгольца» («Квант», 1979, № 8).

ния звука применяют не резонатор Гельмгольца, а другие резонаторы — различного вида трубы, обычно достаточно длинные. Роль препятствия, создающего вихревую дорожку, здесь играют специальные пластинки или просто губы музыканта. Аналогичную функцию выполняют губы свистящего человека, резонатором при этом служит ротовая полость.

— Но почему же я не услышал оглушительного шума? — спросил Стайрон.

— Вы и не могли его слышать, — ответил знаменитый сыщик.— Человек способен воспринимать на слух звуковые колебания с частотой не ниже 16 Гц. Однако на человеческий организм могут воздействовать и звуки более низкой частоты (инфразвуки). Это воздействие может быть очень сильным и даже привести к печальному исходу. Человеческое тело и его отдельные органы имеют собственные частоты колебаний в основном в диапазоне от 3 до 12 Гц. Под действием давления инфразвука на одной из этих частот вибрация органов увеличивается, они могут сильно сместиться и даже деформироваться. Инфразвук влияет также на процессы, протекающие в мозгу, что угнетающе действует на психику (отсюда и чувство страха, потемнение в глазах и т. п.). Следует заметить, что многие животные (в частности, собаки) лучше, чем человек, чувствуют инфразвуковые волны, в чем вы сами убедились, наблюдая за поведением Джуди. Это можно использовать для прогноза землетрясений, поскольку установлено, что мощным подземным толчкам предшествует появление инфразвукового излучения в атмосфере опасного района. Хотелось бы отметить еще одно обстоятельство. Амплитуда колебаний звукового давления внутри резонатора пропорциональна амплитуде действующего на наружное отверстие резонатора внешнего переменного давления. Последняя же величина, как нетрудно понять из соображений размерности, $\sim\rho v^2$, где ρ — плотность воздуха. Ваш случай, молодой человек, можно еще назвать сравнительно безопасным; резонанс возникал при довольно слабой скорости ветра, поэтому инфразвук внутри дома не набрал смертельной силы. В деле, о котором я упоминал в начале беседы, резонанс наступил при почти штормовой скорости ветра...

— Благодарю, сэр,— склонил голову Стайрон.— Теперь я знаю, что делать дальше: можно, например, закрыть дом от ветра на время монтажа брезентовым шатром. После того как все щели будут загерметизированы, шатер можно убрать. Думаю, что уже через неделю состоится первое погружение...

Через неделю началась первая мировая война. Стайрон был призван в военный флот. Его корабль был торпедирован в одиночном плавании немецкой подводной лодкой. Стайрон уцелел один из всего экипажа и, теряя надежды и силы, плыл в безбрежном морском просторе. Вдруг он с ужасом увидел, что на него движется гигантское животное с мордой, похожей на тюленью и украшенной рогом. Зверь проплыл мимо и, нырнув, исчез в глубине... Еще через полчаса сильные руки английского матроса помогли Стайрону забраться в шлюпку.— Ну, и везучий же вы человек, сэр! — услышал он хрипловатый веселый голос.— Наш капитан не спал двое суток, вот ему и померещился сквозь бинокль какой-то огромный рогатый тюлень. Приказал изменить курс, чтобы рассмотреть поближе, и обнаружили вас. Да, если бы не тот мираж, так бы мы с вами, сэр, никогда и не встретились...

БОЛЬШОЙ ТОРТ НА МАЛЕНЬКИХ ТАРЕЛОЧКАХ

И. КОКОРЕВ, Л. КУРЛЯНДЧИК

На пятнадцатой Всесоюзной олимпиаде по математике десятиклассникам была предложена следующая задача: «В прямоугольнике 3×4 см расположены 6 точек. Докажите, что найдется пара точек, удаленных одна от другой не более чем на $\sqrt{5}$ см».

В книге Н. Б. Васильева и А. А. Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад» (М., «Наука», 1988) ее решение уместилось на двух строчках: «Из любых шести данных точек по крайней мере две окажутся в одной из фигур, показанных на рисунке 1».

Однако эта задача является фрагментом весьма интересной и содержательной математической проблемы. О ней мы и расскажем в этой заметке.

Диаметр фигуры

Представьте себе праздничный стол, а на нем — большой торт. За столом сидит n гостей, и перед каждым — *маленькая тарелочка*. Поэтому вам, как хозяину, нужно постараться разрезать этот торт на n кусков так, чтобы их размеры были как можно меньше.

Попросив гостей немного подождать, подойдем к проблеме научно. Кусок торта имеет форму некоторой геометрической фигуры. Введем для нее понятие диаметра.

Что означают слова: *«диаметр круга равен d»? С одной стороны*, это значит, что расстояние между любыми двумя точками круга не превосходит d. С другой стороны, можно найти две такие его точки, что расстояние между ними в точности равно d.

По аналогии с кругом, диаметром произвольной фигуры F назовем такое число d, что расстояние между *любыми двумя точками фигуры F* не превосходит d, и найдутся две такие точки, что расстояние между ними равно d.

Легко понять, что диаметром многоугольника является наибольшее из расстояний между его вершинами (проверьте!).

Теперь вернемся к терпеливо ожидающим гостям. Итак, перед вами *стоит задача: разрезать торт на n* частей так, чтобы наибольший из их диаметров был как можно меньше.

Назовем такой диаметр n-й степенью той фигуры F, форму которой

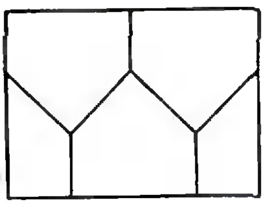
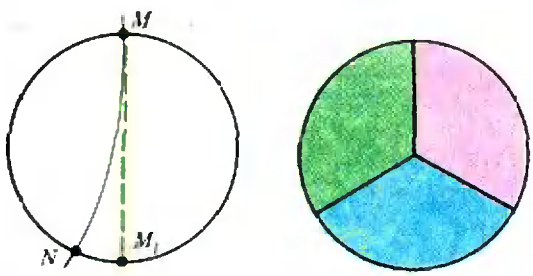


Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

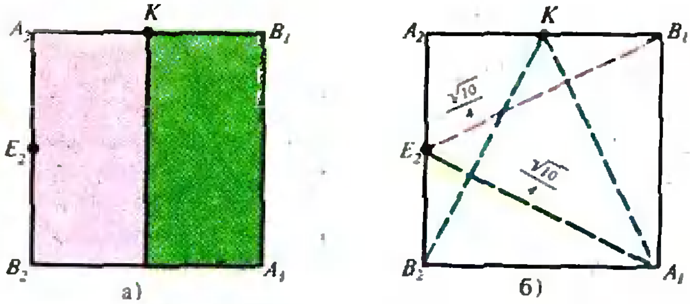


Рис. 3.

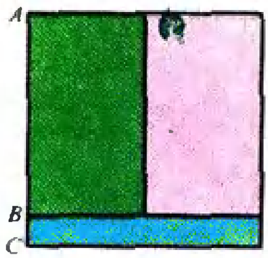


Рис. 4. $BC=\frac{1}{8}AC$.

имеет ваш торт. Обозначать ее будем F^n.

Предположим, что торт круглый. Легко понять, что вторая степень круга равна его диаметру. Действительно, если круг диаметра 1 разрезать некоторой линией MN на две части, то хотя бы одна из них будет иметь тот же диаметр. Посмотрите на рисунок 2, *а*. Точка M принадлежит обеим частям. Точка M_1, диаметрально противоположная точке M, должна принадлежать какой-нибудь из частей, и эта часть (содержащая и точку M, и точку M_1) будет иметь диаметр 1.

Нетрудно найти и третью степень круга диаметра 1. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866...$ (рис. 2, *б*).

Упражнение 1. Найдите четвертую, пятую, шестую и седьмую степени круга диаметра 1.

Если вы справились с упражнением 1, то вам удастся накормить ваших гостей круглым тортом. Если гостей не более семи душ.

Упражнение 2. Пусть торт имеет форму правильного треугольника диаметра 1 (обозначим его Tp). Найдите Tp^2, Tp^3, Tp^4, Tp^5 *).

Разбиение квадрата на две, три и четыре части

Итак, как вы уже смогли убедиться, задача о вычислении F^n непроста, даже если фигура F такая «простая», как круг или правильный треугольник. Если же ваш торт имеет форму квадрата, гостям придется потерпеть еще, пока мы будем считать его степени.

Обозначим через $Кв$ квадрат диаметра 1 (значит, сторона его имеет длину $\sqrt{2}/2$). Заметим, что $Кв^2=\sqrt{10}/4=0{,}790...$ Действительно, на рисунке 3, *а* показано разбиение квадрата по средней линии на два прямоугольника. Диаметр каждого из них равен $\sqrt{10}/4$ (проверьте!). Докажем, что при любом другом разбиении квадрата на две части диаметр одной из них не меньше $\sqrt{10}/4$.

Предположим, что это не так, и квадрат разбит на две фигуры меньшего диаметра. Пусть вершина A_1 принадлежит первому из этих множеств (рис. 3, *б*). Тогда середина стороны A_2B_2 точка E_2 принадлежит второму множеству, т. к. $A_1E_2=\sqrt{10}/4$. Отсюда следует, что вершина B_1 принадлежит первому множеству, а поэтому вершина B_2 принадлежит второму. Но тогда середина стороны A_2B_1 точка K не может принадлежать ни первому, ни второму множеству.

Несколько сложнее найти $Кв^3$. На рисунке 4 приведен пример разбиения квадрата диаметра 1 на три части, диаметр каждой из которых равен $\sqrt{130}/16=0{,}712...$

Предположим, что квадрат можно разбить на три части меньшего диаметра. Покажем, что найдутся три вершины квадрата, принадлежащие разным множествам. Действительно, если вершины A_1 и B_1 (рис. 5) при-

*) В книге «Геометрические оценки и задачи комбинаторной геометрии» Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома (М., «Наука», 1974) приведены значения Tp^n при $n\leqslant 10$.

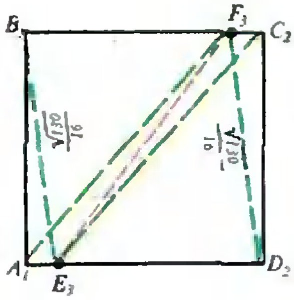


Рис. 5. $A_1E_3=\frac{1}{8}A_1D_2$,

$C_2F_3=\frac{1}{8}B_1C_2$.

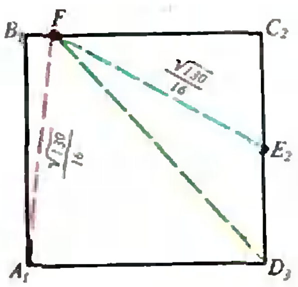


Рис. 6. $B_1F=\frac{1}{8}B_1C_2$.

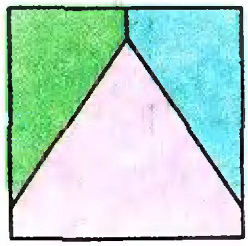


Рис. 7.

надлежат первому множеству, а вершины C_2 и D_2 — второму, то тогда точки E_3 и F_3 такие, что $A_1E_3=\frac{1}{8}A_1D_2$, а $C_2F_3=\frac{1}{8}B_1C_2$, принадлежат третьему множеству. Однако расстояние $E_3F_3>\sqrt{130}/16$.

Далее, так как две соседние вершины принадлежат одному множеству, то мы будем считать, что это A_1 и B_1 (рис. 6). Пусть вершина C_2 принадлежит второму множеству, а вершина D_3 — третьему. Середина стороны C_2D_3 точка E_2 принадлежит либо второму, либо третьему множеству, либо им обоим. Без ограничения общности можно считать, что точка E_2 принадлежит второму множеству. Но в таком случае точка F не может принадлежать ни одному из трех множеств. Тем самым доказано, что $Ke^3=\frac{\sqrt{130}}{16}$.

Конечно же, квадрат разбивается на три множества так, что наибольший из диаметров равен $\frac{\sqrt{130}}{16}$, не единственным образом. На рисунке 7 приведен *другой способ разбиения*. А вообще, нетрудно понять, что искомых способов разбиения бесконечно много.

Упражнение 3. Найдите Ke^4.

Таким образом, если ваших гостей двое, трое или четверо, можете начинать чаепитие. Задача нахождения Ke^5 куда сложнее. К ее решению мы сейчас и приступим.

Разбиение квадрата на пять частей

По аналогии с предыдущими случаями естественно попытаться разбить квадрат на пять прямоугольников (например, рис. 8). Однако такое разбиение оказывается недостаточно «мелким»: если квадрат разрезать так, как был разрезан прямоугольник на рисунке 1, получим меньшее значение максимального диаметра частей.

Итак, попробуем разбить квадрат на два четырехугольника и три пятиугольника, причем так, чтобы диаметры их оказались равными. Это *требование, естественное при поиске* нужного разбиения, выполняется при $AE=\frac{13}{3}AB$ (рис. 9). В этом случае все диаметры равны $\frac{5\sqrt{34}}{64}=0{,}455...$

Докажем, что при любом разбиении квадрата на пять частей *диаметр* одной из них не меньше этого числа.

Допустим, что квадрат удалось разбить на пять частей диаметра меньше $\frac{5\sqrt{34}}{64}$. Очевидно, что все вершины квадрата принадлежат четырем разным множествам разбиения. Ясно также, что точки пятого множества могут попасть не более чем на две (причем соседние) стороны квадрата. Конечно, может оказаться, что их нет ни на одной из его сторон или они есть ровно на одной его стороне.

Предположим, что если точки пятого множества есть на одной стороне квадрата, то это сторо-

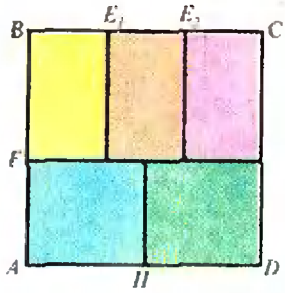
Рис. 8. $AH=\frac{1}{2}AD$,

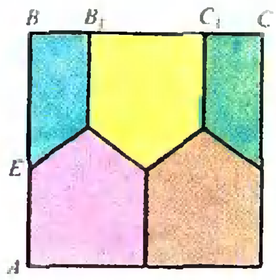
$BE_1=E_1E_2=E_2C$

$AF=\frac{31}{72}AB$.

Рис. 9. $AE=\frac{13}{32}AB$,

$B_1B=\frac{1}{4}BC$.





на A_1A_2, если на двух соседних, то это A_1A_2 и A_1A_4 (рис. 10, *а, б*).

Рассмотрим теперь точку M_5 (рис. 10, *а*). Она принадлежит пятому множеству, ибо длины отрезков A_1M_5, A_2M_5, A_3M_5, A_4M_5 больше $\frac{5\sqrt{34}}{64}$ (проверьте!). Так как, по предположению, на стороне A_3A_4 нет точек пятого множества, то ее середина точка E принадлежит либо третьему, либо четвертому множеству.

Сначала допустим, что E — точка третьего множества. Тогда F_2 (рис. 10, *а*) — точка второго множества. Но в таком случае точка G не принадлежит ни одному из пяти множеств разбиения ($M_5G=F_2G>$ $>\frac{5\sqrt{34}}{64}$).

Пусть теперь E — точка четвертого множества (рис. 10, *б*). Тогда точка H на стороне A_1A_4 не принадлежит четвертому множеству, значит, H — точка либо первого, либо пятого множества. Если H — точка первого множества, то точка L на A_1A_2 не принадлежит ни одному из множеств разбиения, как раньше это было с точкой G. Если же H — точка пятого множества, то на стороне A_1A_2 нет точек пятого множества (проверьте, почему).

Но в начале доказательства мы договорились, что если есть точки пятого множества на A_1A_4, то они есть и на A_1A_2. Пришли к противоречию.

Тем самым доказано, что $Kв^5=$ $=\frac{5\sqrt{34}}{64}$.

Теперь вы сможете разложить большой квадратный торт по пяти маленьким тарелочкам. Попробуем теперь разделить

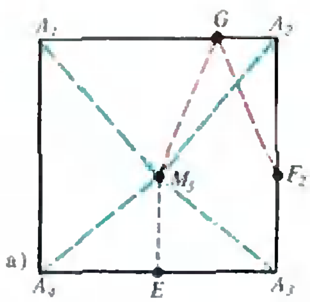
Квадратный торт на шестерых

Первое, что приходит в голову,— разбить квадрат на шесть прямоугольников (рис. 11). В этом случае все диаметры равны $\frac{\sqrt{26}}{12}=0{,}424\ldots$ Однако по аналогии со случаем $n=5$ можно привести более «хоро-

Рис. 10. *а)* $M_5E=A_3F_2=$ $=\frac{13}{32}A_1A_4$,

$A_2G=\frac{1}{4}A_1A_2$.

б) $HA_4=M_5E=$ $=\frac{13}{32}A_1A_4$, $A_1L=\frac{1}{4}A_1A_2$.



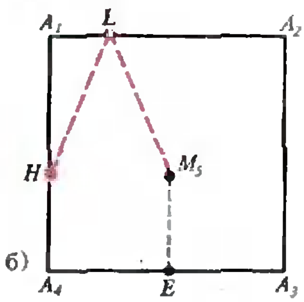


Рис. 11.

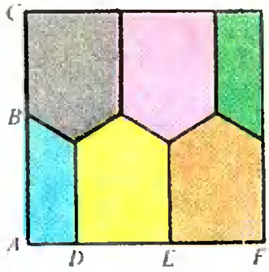


Рис. 12. $AB=\frac{14}{25}AC$,

$AD=\frac{1}{5}AF$,

$DE=EF=\frac{1}{5}AF$.

шее» разбиение (рис. 12). Здесь все диаметры равны $\frac{\sqrt{442}}{50}=0{,}4204...$

Впрочем, и этот пример можно улучшить.

Посмотрите на рисунок 13. Взяв нижнее основание шестиугольника равным $1/4$ стороны, мы получим, что максимальный диаметр равен $\frac{\sqrt{11570}}{256}=0{,}4201...$ Попробуем теперь найти такое основание шестиугольника, чтобы максимальный диаметр был наименьшим среди разбиений такого вида. (Как и раньше, будем добиваться того, чтобы диаметры всех множеств разбиения были равны.)

Итак, пусть d — это наибольший диаметр. Для удобства вычислений примем здесь длину стороны за 1. Тогда $x^2+y^2=d^2=EF^2$, $(1-2x)^2+(1-y)^2=d^2=AG^2=HL^2$ (рис. 14). (Мы не будем принимать во внимание $b=(4x-1)$, ибо, как потом окажется, это расстояние в оптимальном случае меньше d.) Во-первых, имеем $y=\frac{3}{2}x^2-2x-1$. Поэтому $d^2=\frac{9}{4}x^4-6x^3+8x^2-4x+1$ (проверьте!). Найдем значение x, при котором d^2, а значит, и d, минимально. Приравняв к нулю производную и решив получившееся кубическое уравнение, найдем, что искомое значение x равно 0,384... Теперь, вспомнив, что на самом деле длина стороны квадрата равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим, что максимальный диаметр такого разбиения равен 0,4200...

Может быть, вам удастся разрезать квадратный торт на шесть более мелких кусков? Или доказать, что это невозможно?

Кроме того, неизвестно, чему равно Tp^n при $n\geqslant 16$ и n-я степень круга при $n\geqslant 8$. Это трудные задачи, но, возможно, вы решите их?

Иначе, приглашая гостей на чаепитие, вам придется ограничивать их число — в зависимости от формы припасенного торта...

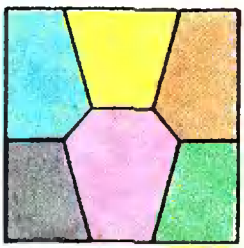


Рис. 13.

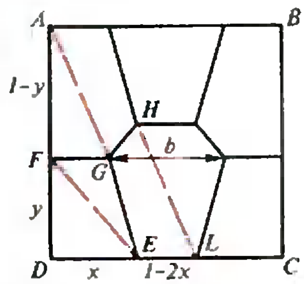
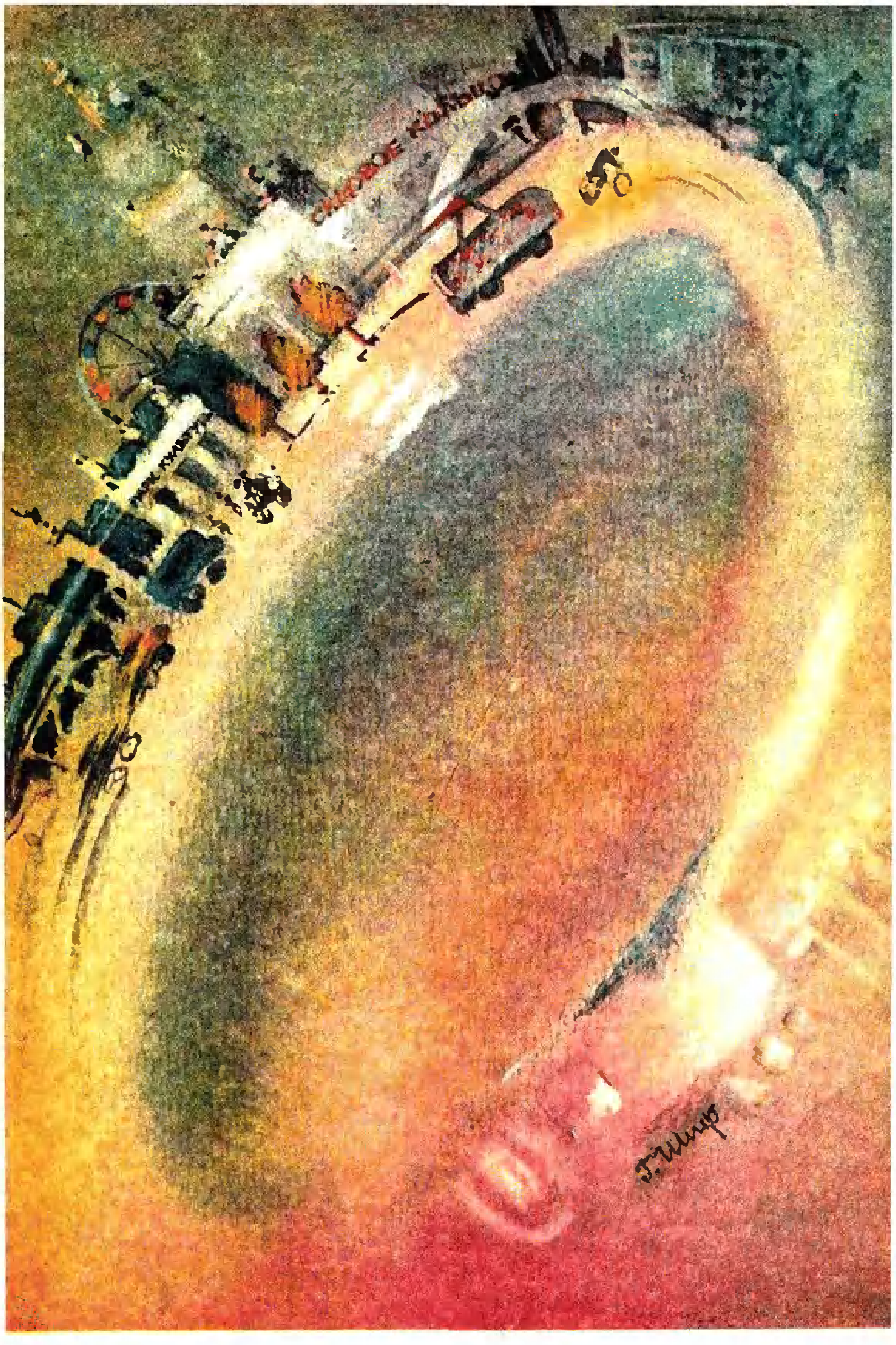


Рис. 14.



«НЕТ ЛИНИИ ПРЯМЕЙ КОЛЬЦА...»

В. ЧВАНОВ

Что такое аналогия?

В науке существует множество способов постановки и решения проблем. Некоторые из них имеют довольно узкую область применения — какой-либо раздел данной науки или даже тип задач. Другие — такие, как анализ, синтез, обобщение — универсальны и с равным успехом используются в самых разных областях науки.

Одним из таких общих методов познания является аналогия. Ее суть — в сопоставлении схожих свойств у объектов, различных по своей природе. Так, если известно, что объект A обладает набором некоторых свойств a, b, c, а объект B — набором схожих свойств a^* и b^*, то можно предположить, что B обладает также и свойством c^*.

Рассуждение по аналогии не обходится без догадки, интуиции. В этом — слабость данного метода исследования, но в этом и его сила. Именно благодаря этой особенности аналогия позволяет переносить идеи из одной области знаний в другие, казалось бы, совсем с ней не связанные. Часто это приводит к решению давних задач, до тех пор не желавших решаться, или к появлению новых.

В алгебре успех может принести переход к другой системе счисления, в геометрии — переход от плоскости к пространству. Менее очевидна аналогия между прямой и окружностью. Ее и иллюстрирует эта статья.

Кольцевая линейка

Самая интересная задача — еще никем не решенная. Она дает возможность по-настоящему испытать радость самостоятельного творчества. Поэтому многие математики составляют по своему вкусу коллекции нерешенных задач. Начало моей коллекции положила следующая

З а д а ч а 1. *При каких k окружность длины $n=k^2-k+1$ (n, k — целые числа) можно разбить k точками на k дуг так, чтобы для любого $m=1, 2, ..., k^2-k$ нашлась дуга длины m?*

Будем называть окружность, удовлетворяющую условию задачи, (n, k)-универсальным кольцом. Частный случай этой задачи был опубликован в «Кванте» № 4 за 1979 год (задача М558): «В круге расположены $k>1$ черных секторов, угол каждого из которых меньше $180^\circ/(k^2-k+1)$. Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра O так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга».

Простота формулировки, казалось бы, намекала на простоту решения. Однако, ознакомившись с известными результатами (некоторые из них изображены на рисунке 1), я понял, что задача не из легких.

Но вот, просматривая старые номера «Кванта», я наткнулся на задачу М399 («Квант» № 8, 1976):

З а д а ч а 2. *На отрезке длины 7 можно поставить пять точек так, чтобы для любого $m=1, 2, ..., 7$ нашлись две из этих пяти точек на расстоянии m.*

Попробуйте выяснить, какое наименьшее число $k(n)$ точек нужно поставить на отрезке длины n, так, чтобы для любого $m=1, 2, ..., n$ нашлись две из этих $k(n)$ точек на расстоянии m.

а) Решите эту задачу для нескольких первых значений n (нам известно $k(n)$ для $n\leqslant 13$).

Заголовок этой статьи — строчка из «Баллады истин наизнанку» Франсуа Вийона.

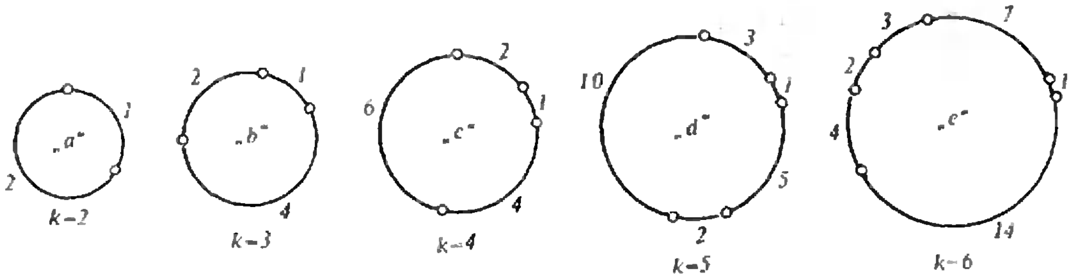


Рис. 1.

б) Получите оценки для $k(n)$ для любого n. Известны оценки $(\sqrt{8n+1}+1)/2 \leqslant k(n) \leqslant \sqrt{4n+5}-1$. Постарайтесь доказать эти неравенства и, если сможете, найдите более точные оценки.

Задачи 1 и 2 похожи, как близнецы. Разница лишь в том, что в одном случае рассматривается окружность, а в другом — отрезок. Сразу возникает идея перенести все, что известно о задаче 2, на задачу 1.

Для краткости будем называть отрезок длины n, размеченный так, как требуется в условии задачи 2, универсальной линейкой длины n.

В статье А. Савина «От школьной задачи — к проблеме» («Квант», № 12, 1976) излагалось решение этой задачи. Оценка сверху — $k(n) \leqslant \sqrt{4n+5}-1$ — получалась там из следующей конструкции универсальной линейки произвольной длины n:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m \text{ раз}}, \underbrace{m+1, m+1, \ldots, m+1}_{l \text{ раз}}.$$

Если $n < m + l(m+1)$, то последний отрезок берется соответственно короче, чем $(m+1)$, при этом линейка остается универсальной.

Вскоре мне удалось для некоторых n построить удачные конструкции линеек.

$$L_1 = 1, 2, 2, 5, 3, 1, 2 \quad (8),$$

$$L_2 = 1, 2, 2, 2, 7, 7, 5, 5, 1, 2, 2 \quad (12),$$

$$L_3 = 1, 2, 2, 2, 2, 9, 9, 9, 7, 7, 7, 1, 2, 2, 2 \quad (16),$$

. . . .

$$L_l = 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{(l+1) \text{ раз}}, \underbrace{2l+3, \ldots, 2l+3}_{l \text{ раз}}, \underbrace{2l+1, \ldots, 2l+1}_{l \text{ раз}}, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{l \text{ раз}} \quad (4(l+1)).$$

Отрезок, заключенный в скобки, можно повторять несколько раз подряд, и линейка новой длины будет по-прежнему универсальной.

Универсальная последовательность и универсальная линейка

Распространить полученные результаты на задачу 1 мне не удалось. Зато нашлась еще одна задача, оказавшаяся близкой к предыдущим двум:

З а д а ч а 3 (М400, «Квант» № 8, 1976): *Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ назовем (n, k)-универсальной, если вычеркиванием части членов из нее можно получить любую последовательность из n чисел, в которую каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ входит по одному разу. Для произвольного n укажите самую короткую (n, k)-универсальную последовательность.*

Примером (4,12)-универсальной последовательности является такая: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3.

В решении, приведенном в журнале, предложен способ построения некоторой конструкции универсальной последовательности, дающей такие оценки числа $k(n)$:

$$(n(n+1))/2 + n - 2 \leqslant k(n) \leqslant n^2 - 2n + 4. \qquad (1)$$

З а д а ч а н а и с с л е д о в а н и е. Постарайтесь улучшить оценки (1).

Универсальную последовательность я счел своеобразной линейкой. Если универсальная линейка измеряла неповторяющиеся отрезки от 1 до n, то универсальная последовательность — все несовпадающие перестановки из чисел 1, 2, ..., n. Немедленно возникла парная к задаче 3

Задача 4 (новая). *k точек делят окружность на k дуг, длины которых — натуральные числа. Разбиение окружности назовем (n, k)-универсальным, если вычеркиванием части дуг из него можно получить любую последовательность из n дуг, в которую дуги с длинами 1, 2, ..., n входят по одному разу. Для произвольного числа n укажите минимальное k, для которого существует (n, k)-универсальное разбиение окружности.*

Оказалось, что предложенные в решении задачи М400 конструкция и оценки числа $k(n)$ годятся и для задачи 4.

Задача на исследование. Построение некоторых (n, k)-универсальных разбиений окружности позволило предположить, что $k(n)=k^2/2$, если n — четно, и $k(n)=(k^2-1)/2$, если n — нечетно. Докажите или опровергните это предположение.

Двоичные родственники универсальной линейки

Ими оказались два варианта задачи М574 («Квант», № 7, 1979):

Задача 5. *Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 1 до $n-1$ сумма $C(k)=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+$ $+a_{n-k}a_n$ является нечетным числом. Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n<1000$.*

Задача 6 (М574, кольцевой вариант). *Укажите значения n, для которых существует такая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из расположенных по окружности чисел 0 и 1, у которой при любом $k (1\leq k\leq(n-1))$ сумма попарных произведений членов, отстоящих на k, т. е. $C(k)=a_1a_{k+1}+$ $+a_2a_{k+2}+\ldots+a_{n-k}a_n$, нечетна.*

Задача 5 полностью решена. В ее решении («Квант» № 6, 1980) не только указываются все значения n, для которых существует искомая двоичная последовательность (назовем ее для краткости n-последовательностью), но и дается несколько способов ее построения.

Приведу (без доказательства) один из них.

Пусть $A=a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторая последовательность, удовлетворяющая условию задачи (например, $A=$ $=1101$). Тогда и последовательность

$$B=A\ \underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{ раз}}\ A\ \underbrace{00\ldots0}_{(3n-2)\text{ раз}}\ A=b_1, \ldots, b_{7n-3},$$

состоящая из трех наборов A и двух наборов нулей между ними, также ему удовлетворяет. В нашем случае

$B=1101\ 000\ 1101\ 0000000000\ 1101$.

Решение задачи 6 неизвестно.

Мне удалось установить родство этих задач с первыми двумя, отыскав преобразование, переводящее (n, k)-универсальное кольцо — решение задачи 1 — в двоичное n-кольцо (решение задачи 6).

Прежде чем описывать это преобразование, следует устранить небольшое препятствие. В обеих задачах использованы буквы n и k. Чтобы избежать путаницы, обозначения, относящиеся к задаче 6, будем использовать в дальнейшем со штрихом. Как выяснится дальше, $n'=n$, но $k'\neq k$.

Теперь построим обещанное преобразование. Сперва возьмем окружность длины $n=k^2-k+1$, для которой существует решение задачи 1. На ней через равные интервалы нанесем n делений (на рисунке 2 $n=7$). Те k из них, которые дают решение задачи 1, отметим красным цветом, а остальные — синим. Затем против каждой красной точки напишем еди-

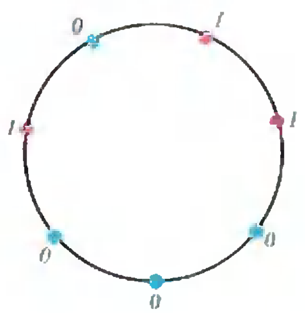


Рис. 2.

ницу, а против синей — нуль. Полученная таким образом замкнутая двоичная последовательность оказывается искомым n'-кольцом.

В самом деле, по условию задачи 1, найдется дуга каждой из длин $m=1, 2, ..., k^2-k$ с концами в красных точках, причем каждая такая дуга встречается ровно 1 раз (в самом деле: всех возможных дуг $k(k-1)$ штук). Но именно в этих точках и только в них стоят единицы, в остальных же — нули. Для задачи 6 это означает, что для любого k' $(0<k'\leqslant(n-1)/2$, поскольку расстояние измеряется по кратчайшей дуге) только одно слагаемое суммы $C(k')$ будет иметь вид $1\times1=1$. Все же остальные слагаемые окажутся вида $0\times0=0$, $1\times0=0$ либо $0\times1=0$. Следовательно, при любом k' $(0<k'\leqslant(n-1)/2)$ сумма $C(k')=1$, т. е. нечетна.

Итак, доказана следующая

Лемма. *Для любого $n=k^2-k+1$, для которого существует (n, k)-универсальное кольцо k-го порядка, существует и соответствующее двоичное n-кольцо той же длины n.*

Универсальные кольца на торе

Через некоторое время моя коллекция пополнилась еще одним любопытным экземпляром:

Задача 7. *В квадрате $n\times n$ клеток нужно отметить центры k клеток так, чтобы никакие четыре отмеченные точки не являлись вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно? Решите задачу для квадратов 3×7 и 13×13 клеток.*

Я нашел ее в книге Н. Б. Васильева и А. А. Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад» (М.: Наука, 1988). В решении этой задачи приведена следующая оценка числа $k(n)$:

$$k(n)\leqslant(n+n\sqrt{4n-3})/2,$$

а также способ построения примеров, для которых эта оценка точна. Вот он.

Строки и столбцы таблицы 7×7 занумеруем тройками из чисел 0 и 1, отличными от (0, 0, 0). Их как раз 7: (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отметим, если $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ — четно. В квадрате 13×13 строки и столбцы нумеруются тройками из чисел 0, 1 и -1, отличными от (0, 0, 0), причем из двух троек, получающихся одна из другой умножением на -1, используется лишь одна. Их ровно 13. Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечают, если $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ делится на три. Полученные таблицы изображены на рисунках 3 и 4.

Описанный способ построения не универсален, и это его главный недостаток.

Мне показалось, что задача 7 — двоюродная сестра предыдущих. Так и есть — повозившись с ней немного,

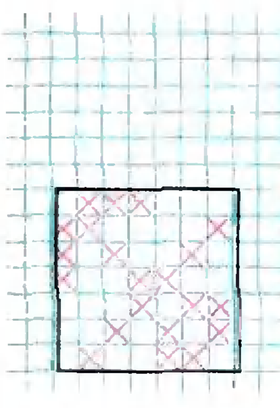


Рис. 3.

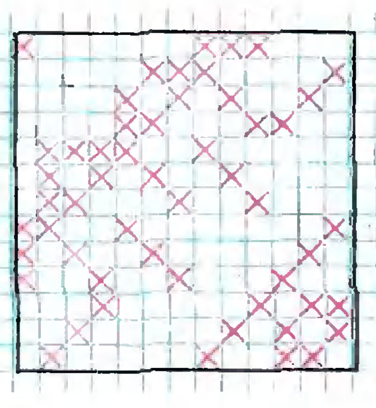


Рис. 4.

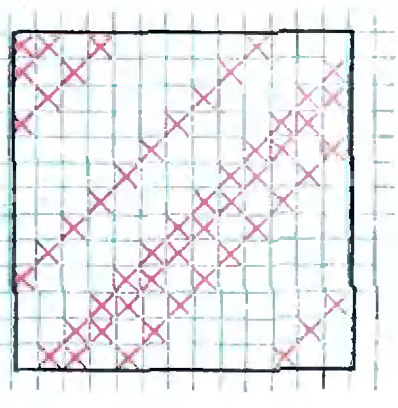


Рис. 5.

я догадался склеить верхнюю сторону квадрата с нижней, а правую — с левой. Из квадрата получился тор, а из столбцов и строк — кольца. Заменив пустые клетки нулями, а отмеченные — единицами, я обнаружил, что одна из кольцевых строк (и соответствующий столбец) оказалась n-кольцом (решением задачи 5).

Более того, существует и «n-тор», каждая строка и столбец которого — n-кольца. Чтобы получить его, достаточно в первой строке квадрата-развертки записать какую-либо n-последовательность, а в каждой следующей — сдвигать ее на одну клетку (рис. 5). Интересно, что некоторые диагональные строки при этом оказываются n-последовательностями. Так я нашел способ построения квадратов, удовлетворяющих условию задачи 7, для любого n, для которого существует n-кольцо.

Планиметрический аналог универсальной линейки

Я давно догадывался о его существовании. Если универсальная линейка измеряла неповторяющиеся длины, то ее планиметрический аналог должен измерять неповторяющиеся площади. Значит, это некий плоский шаблон с точечными отверстиями для вершин измеряемых квадратов. Итак,

Задача 8 (новая). *Какое минимальное число клеток $p(n)$ нужно отметить в квадрате $n\times n$ так, чтобы среди них нашлись все четверки клеток, центры которых бы лежали в вершинах квадратов 1×1, 2×2, ..., $(n-1)\times(n-1)$ со сторонами, параллельными сторонам квадрата $n\times n$?*

Идея решения такова. Допустим, что в искомой разметке никакие два квадрата не имеют общих вершин. Тогда она содержит ровно $4(n-1)$ клеток (по 4 клетки на каждый квадрат). Но такую разметку легко улучшить, совмещая части квадратов так, чтобы некоторые из их вершин совпали. Если эти совмещения производить внутри исходного квадрата $n\times n$, то, очевидно, требование задачи по-прежнему будет выполнено.

Будем совмещать квадраты так, чтобы их диагонали легли на диагональ исходного квадрата. Тогда для общего числа клеток разметки $p(n)$ справедлива оценка

$$p(n)\leqslant 2(n-1)+\varphi(n),$$

где $\varphi(n)\leqslant 2(n-1)$ — число клеток, отмеченных на диагонали квадрата $n\times n$, а $(n-1)$ — число клеток, отмеченных симметрично по обе ее стороны.

Хотелось бы расположить квадраты так, чтобы $\varphi(n)$ было минимально. Но тогда диагональ большого квадрата превращается в универсальную линейку задачи 2 (рис. 6): она должна иметь минимальное число делений и измерять все отрезки (диагонали квадратов) от 1 до $(n-1)$.

При таком способе разметки $\varphi(n)\leqslant (n+2)/2$. Ее анализ прост, и я оставляю его читателю.

Итак, $p(n)\leqslant 2(n-1)+(n+2)/2=(5n-2)/2$, если n — четно, и $p(n)\leqslant (5n-1)/2$, если n — нечетно.

Более точную оценку $p(n)$ дает другой способ разметки диагонали большого квадрата (рис. 7). Сперва метим подряд m клеток. Затем отмечаем оставшиеся клетки диагонали с интервалом в $(n-1)$ клеток. Последняя клетка диагонали отмечается в любом случае (чтобы измерять квадрат $n\times n$). (Кроме того, отмечаются первые m клеток каждого столбца, у которого оказалась отмеченной диагональная клетка, и симметричные им m клеток в соответствующих строках. Но пока мы разметим только диагональ.) Выразим сторону квадрата n через m и $\varphi(n)$:

$$n=m+(\varphi(n)-m)\quad\text{или}$$
$$n=m(\varphi(n)+1)-m^2. \qquad (2)$$

Используя формулу деления с остатком, нетрудно доказать, что при любом m в такой разметке клеток наша «линейка» будет измерять все квадраты со стороной 1, 2, ..., $(n-1)$.

Насколько большим можно сделать n, меняя m при фиксированном $\varphi(n)=k$? Запишем формулу (2) в виде

$$n=(k+1)^2/4-(m-(k+1)/2)^2.$$

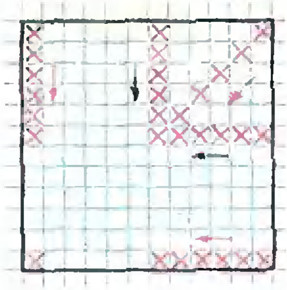


Рис. 6.

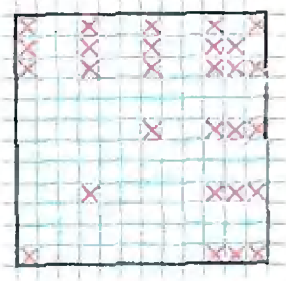


Рис. 7.

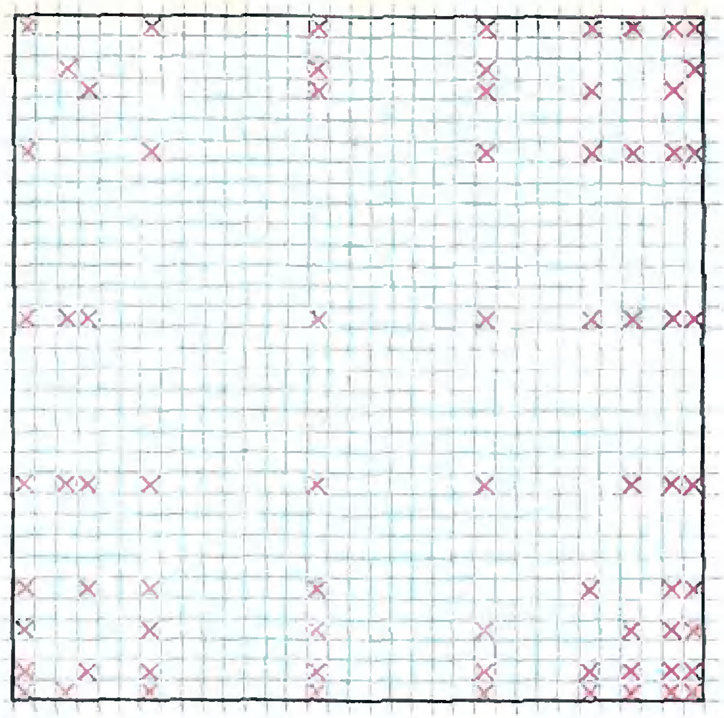


Рис. 8.

Видно, что n будет наибольшим при наименьшем $(m-(k+1)/2)^2$. Поэтому при нечетном k положим $m=(k+1)/2$, а при четном — $m=k/2$ или $m=(k+2)/2$. Итак, $n \geqslant (k+1)^2/4-1/4=(k^2+2k)/4$. Выразив k через n, получим

$$k \leqslant \sqrt{4n+1}-1.$$

Теперь разметим недиагональные клетки, остававшиеся пока без внимания. Их $2(n-1)$, поэтому

$$p(n) \leqslant 2(n-1)+\sqrt{4n+1}-1.$$

или

$$p(n) \leqslant 2n+\sqrt{4n+1}-3.$$

Для некоторых значений n эту оценку можно еще улучшить. Вспомните универсальную линейку задачи 2. Разметим главную диагональ большого квадрата с помощью конструкции, описанной на странице 20. Интервалы между клетками будем брать такими:

0,1,1,4,(7), 2,0,1
0,1,1,1,6,6,(11),4,4,0,1,1
0,1,1,1,1,8,8,8,(15),6,6,6,0,1,1,1
. . . .

При разметке главной диагонали квадрата с помощью этой таблицы число отмеченных клеток k на 2 больше числа запятых (с учетом повторов самого длинного интервала) в выбранной строке таблицы. На рисунке 8 $k=10$, число повторений максимального интервала $m=2$. Его длина $k-m-1$. Суммарная длина двух примыкающих к этой серии интервалов равна $k-m-2$ и повторяется $(k-m-4)/4$ раз. Затем идут единичные и нулевые (когда отмечены две соседние клетки) интервалы суммарной длиной $(k-m-2)/2$. Тогда длина диагонали

$$n=m(k-m-1)+(k-m-2)\times$$
$$\times(k-m-4)/4+(k-m-2)/2+k,$$

или

$$n=\frac{1}{4}(2mk-3m^2+k^2+4).$$

Проанализировав это выражение на максимум при фиксированном k, получим

$$k\leqslant\sqrt{(64n-64)/21}.$$

Тогда

$$p(n)\leqslant 2(n-1)+\sqrt{(64n-64)/21}. \qquad (3)$$

Для оценки числа $p(n)$ снизу используем решение задачи на торе. Склеенный из квадрата со стороной $n=k^2-k+1$, он будет состоять из k штук n-колец. Поэтому на диагональном кольце нашего тора можно отметить k клеток (на рисунке 9 $k=3$, $n=7$) так, что среди них найдутся все пары, лежащие на концах диагоналей квадратов 1×1, 2×2, ..., $(k^2-k)\times\times(k^2-k)$. Поскольку

$$k=(\sqrt{4n-3}+1)/2,$$

то

$$p(n)\geqslant k^2=2n+\sqrt{4n-3}-1)/2. \qquad (4)$$

З а д а ч а н а и с с л е д о в а н и е. *Постарайтесь улучшить оценки (3) и (4).*

Итак, получена планиметрическая универсальная «линейка». Естественным продолжением темы является

З а д а ч а 9 (новая). *Куб состоит из $n\times n\times n$ единичных кубиков. Какое*

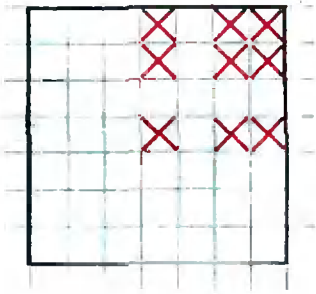


Рис. 9.

минимальное их число нужно отметить, чтобы среди них нашлись все восьмерки кубиков, центры которых лежали бы в вершинах кубов $1\times 1\times 1$, $2\times 2\times 2$, ..., $(n-1)\times(n-1)\times(n-1)$ с ребрами, параллельными ребрам исходного куба $n\times n\times n$?

Думаю, что окончательное решение этой задачи — дело трудное. Но, может быть, кто-то из читателей получит приближенные оценки числа $p(n)$ для «кубической линейки»?

Как видите, рассуждения по аналогии помогли существенно продвинуться в решении задач, оказавшихся при внимательном рассмотрении близкими родственниками. Там же, где не удалось добиться ответа, мы смогли поставить правильные вопросы. А, как известно, правильная постановка задачи — уже половина решения.

(Начало см. на с. 2)

когда высокотемпературные сверхпроводники еще не были созданы. Но и сейчас вопрос остается очень актуальным, хотя в плане перспективы можно было бы упомянуть и проблему комнатно-температурной сверхпроводимости. В новом издании книги об этом, конечно, говорится, но названия темы 2 я изменять не стал. Добавлен, однако, вопрос о сверхдиамагнетиках, т. е. о веществах, не являющихся сверхпроводниками, но обладающих очень большой диамагнитной восприимчивостью.

Как я считаю, каждый физик должен иметь представление о проблематике, связанной со всеми перечисленными в списке вопросами. Имея в виду лишь общие сведения («без формул»), думаю, что такая цель легко достижима. Еще раз подчеркну условность моего списка, его догматизация противоречила бы самому духу науки.

Л и т е р а т у р а

1. В. Л. Гинзбург. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными? Успехи физических наук, 1971, т. 103, с. 87.

2. В. Л. Гинзбург. О физике и астрофизике. М.: Наука, 1985.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1291 — М1295, Ф1298 — Ф1302

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 сентября 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1291» или «Ф1298». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1291. Докажите, что а) в правильном 12 угольнике, б) правильном 54-угольнике найдутся 4 диагонали, не проходящие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной точке.

С. Токарев

М1292. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, так, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утвержденных расходов не превысит S?

И. Сергеев

М1293. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

И. Шарыгин

М1294. Куб размером $10\times10\times10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков таким образом, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1\times1\times10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, стало не хватать ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4.

А. Спивак

М1295. На прямоугольном экране размером $m\times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате 2×2 не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.

А. Часовских

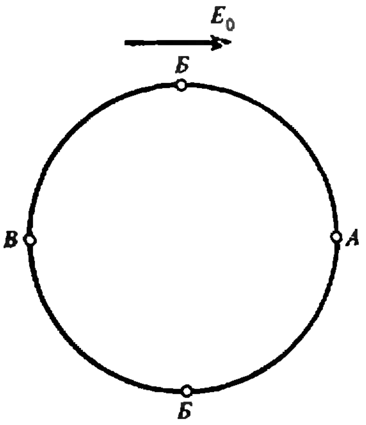
Ф1298. Тяжелый шарик подбросили вверх со скоростью v_0. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости шарика, найдите отрезок времени, через который шарик упадет в точку, откуда он был брошен. При скорости v_0 сила сопротивления $F=\alpha v_0\gg mg$ (здесь α — коэффициент пропорциональности, m — масса шарика).

А. Андрианов

Задачник „Кванта"

Ф1299. Черный шарик радиусом $r=1$ мм подвешен на тонкой нити длиной $l=1$ м. Вся система помещена в вакуумированную стеклянную трубку с аргоном при давлении $p_0=0{,}1$ Па. Шарик освещают горизонтальным пучком света, плотность потока энергии в котором равна $w_0=100$ Дж/м$^2\cdot$ с. Оцените величину отклонения шарика от положения равновесия под действием света. Теплопроводностью шарика пренебречь. Учесть, что абсолютно черное тело, нагретое до абсолютной температуры T, излучает с единицы поверхности за единицу времени энергию, равную σT^4, где $\sigma=5{,}67\cdot 10^{-8}$ Вт/м$^2\cdot$ К^4. Температура газа в трубке постоянна и равна $T_0=293$ К. Молярная масса аргона $M=0{,}04$ кг/моль, плотность шарика $\rho=1$ г/см^3.

А. Семенов



Ф1300. Известно, что при внесении незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле напряженностью E_0, напряженность поля вблизи точки A (см. рисунок) оказывается равной $3E_0$, а вблизи точки $Б$ — нулю. Определите напряженность поля вблизи точки $В$. Найдите полный заряд, индуцированный на полусфере $БАБ$. Радиус сферы R.

В. Можаев

Ф1301. На тороидальном сердечнике симметрично расположены три одинаковые обмотки, образующие трансформатор. Одну из обмоток подключили к источнику переменного напряжения, вторую оставили разомкнутой, а к третьей подключили вольтметр. Оказалось, что вольтметр в этом случае показывает половину напряжения источника. Что он покажет, если вторую обмотку замкнуть накоротко? Считайте сопротивления обмоток пренебрежимо малыми, вольтметр и источник — идеальными, магнитную проницаемость сердечника — не изменяющейся при различных значениях магнитной индукции.

А. Андрианов

Ф1302. На прислоненное к стенке тело массой M перпендикулярно стенке действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F=F_0\cos\omega t$. Между телом и стенкой помещают невесомую пружину. Какой должна быть ее жесткость, чтобы амплитуда силы, действующей на стенку, отличалась от F_0 в 3 раза?

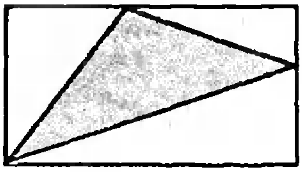
И. Воробьев

Решения задач

М1266 — М1270, Ф1278 — Ф1282

М1266. ***Внутри круга радиусом 1990 с центром в начале координат отмечено 555 точек с целыми координатами, никакие три из которых не лежат***

Площадь треугольника с вершинами в целых точках — целое или полуцелое число (т. е. число вида $n/2$, где n — целое). Это легко увидеть, заключив треугольник в наименьший прямоугольник с вершинами в целых точках и сторонами, параллельными осям: на рисунке площадь розового треугольника равна разности целого *на одной прямой. Докажите, что найдутся два треугольника равной площади с вершинами в этих точках.*



числа — площади прямоугольника — и трех полуцелых чисел — площадей прямоугольных треугольников у его вершин. (Это сразу следует также из формулы Пика, см. «Калейдоскоп «Кванта» в этом номере журнала.) Поскольку площадь треугольника не больше площади круга $\pi 1990^2 < 12{,}6\cdot 10^6$, она принимает не более $25{,}2\cdot 10^6$ различных значений. С другой стороны, количество различных (неупорядоченных) троек из 555 точек равно $555\cdot 554\cdot 553/6 > 25{,}2\cdot 10^6$; таким образом, найдутся два треугольника с равной площадью. Можно получить и более точную оценку. Можно показать, что площадь треугольника с вершинами внутри круга будет не больше площади равностороннего треугольника, вписанного в круг, т. е. не больше $3\sqrt{3}/4\cdot 1990^2$, а эта величина меньше удвоенного числа троек $n(n-1)(n-2)/3$ уже при $n=397$, так что уже из 397 точек общего положения всегда можно выбрать два треугольника с равной площадью.

К. Кохась

М1267. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторая перестановка из чисел $1, 2, \ldots, n$; r_k — остаток от деления числа $a_1+a_2+\ldots+a_k$ на n ($k=1, 2, \ldots, n$). Докажите, что среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по крайней мере $\sqrt{n}$ различных (если $n>2$).*

Предположим, что среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ всего m различных. Заметим, что лишь для одного k может выполняться равенство $r_{k+1}=r_k$ (когда $a_{k+1}=n$). Для всех остальных k от 1 до $n-1$ разности $r_{k+1}-r_k$ — различные числа. Но из m разных чисел можно составить лишь $m(m-1)$ разных упорядоченных пар и тем самым не более $m(m-1)$ разных разностей. А их должно быть не меньше $n-2$. Таким образом, $m(m-1)\geqslant n-2$. Если бы m было меньше $\sqrt{n}$, то получилось бы (при $n\geqslant 4$) противоречие: $n-\sqrt{n}>n-2$. Для $n=3$ легко убедиться непосредственной проверкой, что среди трех остатков r_1, r_2, r_3 всегда не менее двух различных. Таким образом, утверждение доказано.

Л. Курляндчик

М1268. *Внутри треугольника ABC взята произвольная точка X. Прямые AX, BX, CX пересекают стороны BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1. Пусть $AB_1\cdot AC_1\cdot BC_1\cdot BA_1\times\times CA_1\cdot CB_1=\Pi$. Докажите, что площадь S треугольника $A_1B_1C_1$ равна $S=\sqrt{\Pi}/2R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.*

Пусть точки C_1, A_1 и B_1 делят стороны $c=AB$, $a=BC$ и $b=CA$ соответственно на отрезки p и u, q и v, r и w (рис. 1). Поскольку площадь треугольника с данным углом пропорциональна произведению сторон, образующих этот угол, площадь S голубого треугольника равна площади всего треугольника S_{ABC}, умноженной на коэффициент

$$1-\frac{qu}{ca}-\frac{rv}{bc}-\frac{pw}{ab}=\frac{abc-bqu-arv-cpw}{abc}.$$

Подставив вместо a, b, c суммы $p+u$, $q+v$, $r+w$ и вспомнив известную формулу $S_{ABC}=abc/4R$, мы получим красивую формулу площади голубого треугольника

$$S=\frac{pqr+uvw}{4R},$$

но она отличается от той, которую требовалось доказать. Теперь воспользуемся теоремой Чевы, согласно которой при любом выборе точки X внутри треугольника

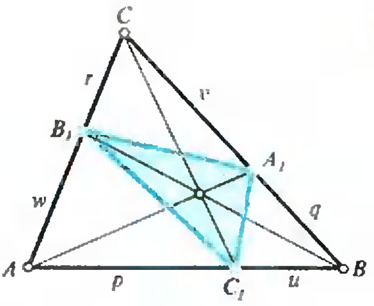


Рис. 1.

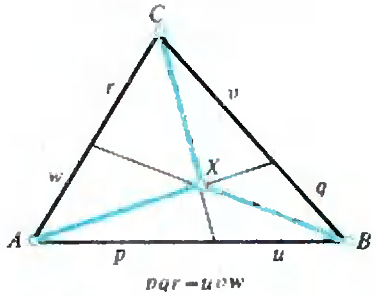


Рис. 2 (теорема Чевы).

ABC верно равенство

$$pqr = uvw. \qquad (*)$$

Из равенств (*) и $\Pi = pqruvw$ следует, что

$$\Pi = (pqr + uvw)^2/4,$$

а значит, и требуемая формула для S.

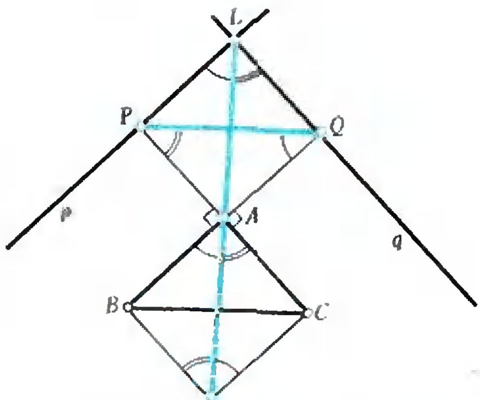
Для доказательства формулы (*) можно также использовать площади. Отношение площадей треугольников AXB и CXB с общим основанием XB равно отношению их высот, т. е. w/r (рис. 2). Перемножая три таких отношения, получим

$$\frac{p}{u}\cdot\frac{q}{v}\cdot\frac{r}{w} = \frac{S_{BXC}}{S_{CXA}}\cdot\frac{S_{CXA}}{S_{AXB}}\cdot\frac{S_{AXB}}{S_{BXC}} = 1.$$

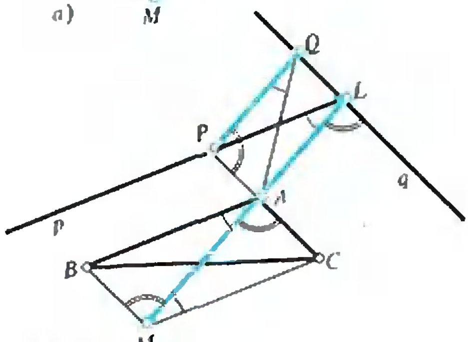
Н. Васильев, В. Прасолов

М1269. *На плоскости дан треугольник ABC. Прямая p параллельна прямой AB и расположена на расстоянии AC от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (p и AB) нет внутренних точек треугольника ABC. Прямая q параллельна прямой AC и расположена на расстоянии AB от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (q и AC), нет внутренних точек треугольника ABC. Прямые p и q пересекаются в точке L. Доказать, что прямая AL проходит через середину BC.*

Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ABMC$ (см. рисунок). Нужно доказать, что диагональ AM составляет продолжение отрезка AL. Опустим из точки A перпендикуляры AP и AQ на прямые p и q.



а)



б)

Задачник „Кванта"

Треугольник APQ равен каждому из треугольников ACM и MBC (по двум сторонам и углу между ними — этот угол равен $180° - \angle BAC$). Точки A, P, L, Q лежат на одной окружности (с диаметром AL). Отсюда следует равенство углов, одинаково обозначенных на рисунке. (Достаточно выбрать один из углов BAM и MAC — удобнее выбрать меньший: если $\angle BAM = 180°$, то $\angle BAM = \angle PQA = \angle PLA$.) Тем самым, углы отрезка AL с прямыми p и q равны углам, образованным диагональю AM и сторонами AB и AC, что и требовалось доказать.

Я. Коваль

М1270. *Докажите, что если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то*

$$12^m + 9^m + 8^m + 6^m$$

делится на 1991.

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots + b^{2k}).$$

Разложим данное число на два множителя: $(3^m + 4^m)(3^m + 2^m)$. При $m = 5(2k+1)$, где k — целое неотрицательное число, эти множители делятся (как видно из тождества, приведенного на полях) соответственно на $3^5 + 4^5 = 343 + 1024 = 1367 = 7 \cdot 181$ и на $3^5 + 2^5 = 243 + 32 = 275 = 5^2 \cdot 11$. Поэтому данное в условии число делится на $181 \cdot 11 = 1991$.

Н. Васильев

Ф1278. *Летящий вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. Осколки снаряда выпадают на землю в течение промежутка времени t. Найдите скорость осколков в момент взрыва.*

Скорость запущенного вверх снаряда в верхней точке равна нулю. Будем считать, что осколки летят во все стороны с одинаковыми по величине скоростями v. Тогда максимальное различие времен падения — оно соответствует времени выпадания осколков на землю t — будет для осколков, летящих по вертикали. Осколок, летящий после взрыва вверх со скоростью v, через время $2v/g$ окажется в точке взрыва, и его скорость будет равна v и направлена вниз. Значит, разность времен как раз равна $2v/g = t$, откуда

$$v = gt/2.$$

Заметим, что если скорости осколков различны, то ничего определенного сказать нельзя.

О. Савченко

Ф1279. *Прочный цилиндрический сосуд объемом $V = 10$ л, содержащий $m = 3$ г кислорода, разделяют тонкой перепонкой, которая выдерживает разность давлений $\Delta p = 1000$ Па. В левой части сосуда (она составляет 1/3 объема сосуда) включают нагреватель. Благодаря теплопроводности перепонки, тепло перетекает в правую часть сосуда. Из-*

Найдем условие, при котором разность давлений на перепонку равна предельному значению:

$$p_1V/3 = \nu RT_1/3, \quad 2p_2V/3 = 2\nu RT_2/3,$$

откуда получаем

$$T_1 - T_2 = (p_1 - p_2)V/(\nu R).$$

При такой разности температур из левой части сосуда в правую перетекает мощность

$$N = \Delta Q(T_1 - T_2)/\Delta T.$$

Для того чтобы разность температур оставалась постоянной, приходящая в систему полная мощность должна быть больше в 1,5 раза — ведь полная масса как раз в *вестно, что при разности температур $\Delta T=1$ К за одну секунду перетекает количество теплоты $\Delta Q=0{,}2$ Дж. При какой максимальной мощности нагревателя перепонка останется целой в процессе длительного нагревания?*

1,5 раза больше массы правой части. Окончательно имеем

$$N_{общ}=1{,}5\Delta Q\Delta pV/(\nu R\Delta T)=3{,}85\ \text{Вт}.$$

Заметим, что в самом начале процесса мощность может быть выше — до выхода на стационарный режим.

Р. Александров

Ф1280. *В коробке с тремя выводами А, Б и В находится неизвестная схема, состоящая из резисторов. При помощи омметра измерены сопротивления между различными выводами: $R_{АБ}=10$ Ом, $R_{БВ}=20$ Ом, $R_{АВ}=30$ Ом. К точкам А и В подключают батарейку напряжением $U=1{,}5$ В, а между Б и В — амперметр, сопротивление которого $r=5$ Ом. Что он покажет?*

При данном в условии соотношении сопротивлений подходящей будет схема, изображенная на рисунке 1. Теперь подключим к схеме батарейку и амперметр —

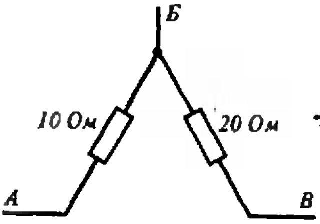


Рис. 1.

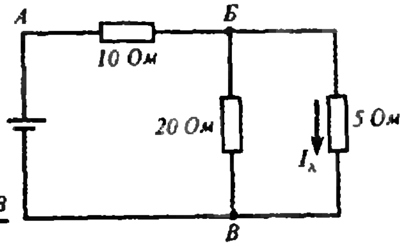


Рис. 2.

рисунок 2. Общее сопротивление цепи равно

$$R_{общ}=R_{АБ}+\frac{R_{БВ}r}{R_{БВ}+r}=14\ \text{Ом},$$

общий ток в цепи —

$$I_{общ}=\frac{U}{R_{общ}}\approx 0{,}11\ \text{А},$$

а амперметр показывает ток

$$I_A=I_{общ}\frac{R_{БВ}}{R_{БВ}+r}\approx 0{,}09\,\text{А}.$$

А. Сашин

Ф1281. *Из пяти одинаковых конденсаторов и катушки собрана схема, показанная на рисунке. Найдите максимальный ток через катушку после подключения батарейки напряжением U_0. Найдите также максимальное напряжение на параллельно соединенных конденсаторах. Сопротивление проводов считать малым.*

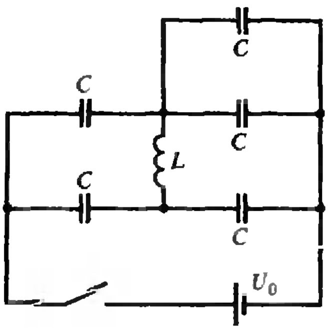
Сразу после включения конденсаторы будут заряжаться от батарейки так, как если бы катушки вовсе не было — ток через нее вначале пренебрежимо мал. (Это справедливо при идеальной батарейке и проводах с очень малым сопротивлением. Попробуйте сами сделать оценку, по сравнению с чем именно должно быть малым это сопротивление.)

Подсчитаем энергию получившейся (без катушки) системы конденсаторов:

$$C_1=C/2+2C/3=7C/6,\ W_1=C_1U_0^2/2=7CU_0^2/12.$$

Кстати сказать, в процессе быстрой зарядки будет выделяться тепло, но для нас это неважно — энергетический баланс мы будем рассчитывать начиная с того момента, когда выделение тепла уже закончится.

В тот момент, когда ток через катушку будет максимальным, ее ЭДС самоиндукции будет равна нулю. Тогда получается другое соединение конденсаторов — два



левых соединены параллельно, а последовательно к ним подключены параллельно соединенные друг с другом три правых конденсатора. Энергия этой системы будет равна

$$C_2=6C/5,\ W_2=3CU_0^2/5.$$

Батарейка «протолкнула» по цепи дополнительный заряд

$$q=C_2U_0-C_1U_0=CU_0/30.$$

Работа батарейки при этом равна

$$A=qU_0=CU_0^2/30.$$

Теперь можно записать баланс энергий:

$$W_1+A=W_2+LI_m^2/2,$$

$$LI_m^2/2=7CU_0^2/12-3CU_0^2/5+CU_0^2/30=CU_0^2/60,$$

$$I_m=U_0\sqrt{C/(30L)}\,.$$

Находить максимальное напряжение на соединенных параллельно конденсаторах «в лоб» довольно нудно — придется записывать несколько уравнений для зарядов, которые оказались на конденсаторах (с учетом того, что некоторый заряд протек по катушке), и еще уравнение баланса энергий; проще сообразить, что искомое напряжение меняется по гармоническому закону относительно некоторого среднего значения, которое соответствует нулевому току через катушку. При нулевом токе это напряжение равно (как и вначале) $U_0/3$, при максимальном токе через катушку оно составляет $2U_0/5$, т. е. оно увеличилось на $U_0/15$. Это означает, что за следующую четверть периода, когда ток катушки уменьшится от максимального значения до нуля, напряжение увеличится еще на столько же и составит $7U_0/15$.

А. Зильберман

Ф1282. *Куб с ребром $a=10$ см, имеющий массу $M=1$ кг, подвешен на пружине жесткостью $k=400$ Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток упругих шариков, обладающих скоростью $v_0=20$ м/с на высоте первоначального положения основания куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно. Найдите период этих колебаний. Оцените время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза.*

Масса куба велика по сравнению с массой шариков; значит, после абсолютно упругого удара скорость шарика относительно куба остается практически неизменной. Импульс, переданный кубу при ударе шарика (см. рисунок), равен

$$P=2m(v_0-v).$$

Число ударов за время Δt есть

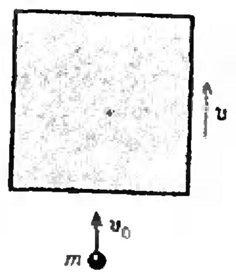
$$N=(v_0-v)a^2n\Delta t.$$

Сила, действующая на куб со стороны потока шариков, равна

$$F=\frac{NP}{\Delta t}=2m(v_0-v)^2a^2n\approx 2ma^2nv_0^2-4ma^2nv_0v.$$

Мы учли, что скорость куба много меньше скорости шарика ($v\ll v_0$); первое слагаемое — это постоянная добав-

Масса каждого шарика $m = 1$ г, концентрация шариков в потоке $n = 1000$ м$^{-3}$, столкновениями шариков между собой пренебречь.



ка, второе — сила сопротивления, пропорциональная скорости v. Еще на куб действует упругая сила со стороны пружины и сила тяжести. Для смещения x относительно положения равновесия получаем уравнение

$$Mx'' + 4x'v_0mna^2 + kx = 0.$$

Это — уравнение затухающих колебаний. Известны общие приемы решения таких уравнений, однако в нашем случае все довольно просто — затухание можно считать малым (мы так и сделаем, а потом проверим справедливость этого предположения). Итак, период колебаний равен

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \approx 0{,}31 \text{ с}.$$

За время одного периода можно считать (при небольшом затухании)

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$

Работа сил сопротивления за один период в этом случае может быть рассчитана так. За малый промежуток времени Δt работа силы $F = \alpha v$ равна

$$\Delta A = F\Delta x = \alpha v v \Delta t = \alpha v^2 \Delta t.$$

Работу за период можно найти, зная зависимость квадрата скорости от времени:

$$\Delta A = \alpha(v_m \cos \omega t)^2\ \Delta t,$$

$$A = \alpha((v_m \cos \omega t)^2)_{\text{ср}}T = \alpha\frac{v_m^2}{2}T.$$

При этом максимальная энергия системы —

$$W = \frac{Mv_m^2}{2},$$

а ее относительное изменение —

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{A}{W} = \frac{\alpha v_m^2 T/2}{Mv_m^2/2} = \frac{\alpha T}{M} \approx 0{,}24.$$

При уменьшении амплитуды в 2 раза энергия уменьшается в 4 раза. Тогда искомое число периодов можно определить так:

$$\left(1 - \frac{\Delta W}{W}\right)^K = \frac{1}{4} \Rightarrow K = 5,$$

и время затухания оказывается равным

$$\tau \approx KT \approx 1{,}5 \text{ с}.$$

И. Мартин

Задачник „Кванта"

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1246—М1260, Ф1253—Ф1267, справились с задачами М1246, М1256. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

П. Андреева (п. Черноголовка Московской обл.) 47, 54; *Д. Андриенко* (Киев) 47, 51, 54, 55; *А. Ахмедов* (Баку) 47, 49, 57, 59, 60; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 47, 48; *Е. Беркович* (Киев) 47; *А. Бородин* (Донецк) 48; *В. Бринюк* (Донецк) 47—49, 51, 54; *М. Воронецкая* (Ижевск) 51, 52, 54; *О. Гайдай* (Львов) 54; *Ю. Гапон* (Прилуки) 60; *М. Гельбанд* (Одесса) 47; *А. Жеглов* (Москва) 48—51, 54, 55, 59, 60; *М. Завьялов* (Омск) 52; *В. Замятин* (Киров) 54; *К. Зарьков* (Минск) 48, 51, 54, 57, 59; *А. Зимин* (Иваново) 54; *М. Иванов* (Ужгород) 47, 54; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 47, 54; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) 47, 48, 51, 54; *Р. Исмаилов* (Ленинград) 47—49; *Т. Калита* (Киев) 51; *И. Кацман* (Киев) 51; *С. Коваценко* (Винница) 47—49; *П. Кожевников* (Калуга) 47, 48, 54, 57, 59; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 48; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 47; *А. Кудрявцева* (Киев) 47, 48, 51, 54, 55; *Д. Ланин* (Омск) 51, 54, 59; *А. Лопушанский* (Львов) 47; *К. Мильштейн* (Киев) 47, 51, 53—55; *К. Мишачев* (Липецк) 47—49, 51—54, 59, 60; *А. Насыров* (Обнинск) 48; *Е. Перельман* (Ленинград) 47—49, 51, 54, 57, 59; *А. Петросян* (Ереван) 47, 51, 54; *В. Рычков* (Самара) 54; *А. Сарсембаев* (Аркалык) 47, 48; *Г. Сироткин* (Харьков) 47; *А. Соклаков* (Одесса) 51, 54; *А. Солодов* (Воронеж) 47, 48, 51, 52, 54; *А. Солодовников* (Одесса) 47, 51; *А. Солодушкин* (Томск) 47, 51; *М. Темкин* (Москва) 51, 54; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 47—49, 51, 53, 55; *М. Хасин* (Донецк) 47, 48, 51, 54; *А. Шиндлер* (Феодосия) 47, 51, 54.

Физика

М. Абдуллаев (Баку) 54, 59, 61; *С. Атанасян* (Ленинград) 53—55, 59, 63, 64, 67; *С. Ахметзянова* (Белорецк) 54; *Я. Бабкин* (Киев) 53, 54, 62, 63, 65, 67; *С. Базылько* (Северодвинск) 63, 64, 67; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 54, 55, 57; *М. Барашков* (д. Осиновка Могилевской обл.) 53, 54, 57; *Н. Баширов* (Ленкорань) 64, 67; *А. Бекмамбетов* (Москва) 53; *Д. Белобрагин* (Тула) 53, 55; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 54—56, 61, 63, 64, 66; *А. Борковский* (пгт Богородчаны Ивано-Франковской обл.) 58, 60, 63, 65, 67; *Л. Васильев* (Салават) 53, 54, 61, 63, 66, 67; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 53—55, 57; *О. Весельева* (Белгород) 64; *М. Волошина* (Москва) 53, 55; *П. Волынец* (Брест) 63, 64, 67; *И. Воскобойник* (Киев) 53, 55, 59, 62—67; *В. Глазков* (Коломна) 53, 55, 63, 64; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 53—56, 61, 63, 64, 66; *Т. Григорян* (Ереван) 53, 54; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 53—57, 59—67; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 53—55, 59, 61—64, 67; *И. Дайков* (Казанлык, Болгария) 53; *А. Деев* (Тула) 54; *А. Дементьев* (Чебоксары) 53—55, 57—59, 61; *А. Демяненко* (Горловка) 53, 54; *С. Джосюк* (Винница) 53—55, 57—62; *С. Дибров* (Киев) 53—55, 57, 59, 62—67; *И. Дискин* (Запорожье) 64; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 53—55, 57—62; *А. Дубовик* (Брест) 53—55, 57; *Д. Душамов* (Шават) 67; *О. Дымар* (Каменец) 55; *М. Дьяк* (Владимир) 54, 55, 59, 62—64, 66, 67; *М. Егоров* (Старый Оскол) 54, 64, 65, 67; *Ю. Егоров* (Авдеевка) 54; *Н. Ефремов* (Свердловск) 53, 63, 64, 67; *А. Ечкало* (Запорожье) 53, 54, 57; *С. Жак* (Тернополь) 64, 67; *В. Жарина* (Воронеж) 55; *А. Жуков* (Воронеж) 63, 64; *В. Жуликов* (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 64, 67; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 53—55; *М. Заболотный* (Винница) 54; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 63—67; *А. Зайцев* (Железногорск) 53—55, 57, 58, 60—65, 67; *А. Засепский* (Брест) 64; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 64—67; *И. Зозуля* (Одесса) 53, 54, 64, 67; *М. Иванов* (Ужгород) 54; *М. А. Иванов* (Тула) 53—55, 57—67; *М. Г. Иванов* (Тула) 53—55, 57—60, 62—67; *Н. Ивченко* (Киев) 53—55, 58, 59, 61, 63, 64, 66, 67; *В. Каленский* (Ташкент) 54, 61, 67; *Т. Калита* (Киев) 54; *К. Калюжный* (Одесса) 53—55, 61, 62, 64, 67; *Н. Карелин* (Минск) 53—55, 64, 67; *И. Кацман* (Киев) 54, 59, 62; *А. Каширин* (Старый Оскол) 54, 64, 65, 67; *Д. Килин* (Минск) 64, 67; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 53—56, 61, 63, 64, 66, 67; *А. Ковальский* (Казань) 64; *Б. Ковтуненко* (Запорожье) 53—55, 58, 61, 62; *В. Козлов* (Старый Оскол) 53—55, 59, 63, 64, 67; *Т. Колесникова* (Вишневое) 54; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 53—55, 58, 61—64, 66, 67; *Д. Комиссаров* (Арзамас) 63, 67; *Т. Корж* (Киев) 64, 67; *А. Крампульс* (Тула) 53, 55, 58, 59, 63, 65, 67; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 54; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 53—55, 61, 62, 65—67; *Д. Кример* (Брест) 55, 63—67; *И. Кузнецова* (Краснодар) 53; *Ю. Кузьма* (Протва) 53—55, 57, 58, 60; *С. Кузьменко* (Киев) 53—55, 61—67; *П. Куприн* (Северодвинск) 55; *У. Курязов* (Шават) 53; *И. Кушниров* (Киев) 63; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 64—67; *Д. Ларьков* (Брест) 64; *В. Легостаев* (Кустанай) 64, 67; *Д. Леонов* (Меленки) 67; *Д. Логинов* (Тула) 53—55, 57—61, 63—67; *Д. Лунев* (п. Черноголовка Московской обл.) 53—55, 57; *К. Мазюкевич* (Кузнецовск) 64, 67; *В. Макаров* (Ки-

(Окончание см. на с. 39)

„Квант" для младших школьников

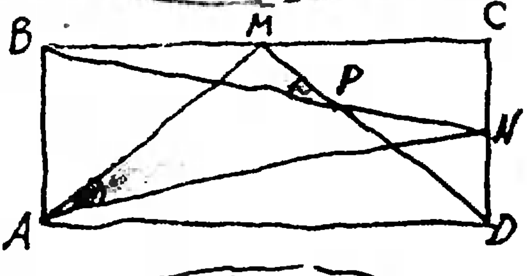
Задачи

1. На прошлом чемпионате Европы по футболу Ван Бастен забил в два раза меньше мячей, чем Гуллит. Михайличенко забил на один мяч меньше, чем Ван Бастен. Фёллер забил на три мяча больше, чем Михайличенко. Скилаччи забил на три мяча больше, чем Фёллер. Известно, что двое из этих пяти футболистов забили одинаковое число мячей и никто не забил мячей больше, чем Гуллит. Сколько мячей забил каждый из них?

2. Закончите заполнение квадрата буквами Ч, У, К, Е, Г так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и на каждой диагонали присутствовали все эти буквы по одному разу.

3. Администратор гостиницы работает либо с 8 утра до 8 вечера, либо с 8 вечера до 8 утра, либо сутки с 8 часов (утра или вечера). В первом случае он отдыхает не меньше суток, во втором — не меньше полутора суток, в третьем — не меньше двух с половиной суток. Какое наименьшее количество администраторов должно работать в гостинице?

4. В прямоугольнике $ABCD$ (см. рисунок) точка M — середина стороны BC, точка N — середина стороны CD, P — точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что угол MAN равен углу BPN.



5. В кружке «Умелые руки» занимаются 40 школьников, у каждого в карманах лежат винтики, болтики и гвоздики. Ровно у 10 из них количество гвоздиков равно количеству винтиков, а ровно у 15 школьников количество гвоздиков не равно количеству болтиков. Докажите, что не менее чем у 15 кружковцев количество винтиков не равно количеству болтиков.

Эти задачи нам предложили А. Сарсембаев, Л. Никонов, И. Сергеев, В. Произволов и К. Кохась.

ОГНИ СВЯТОГО ЭЛЬМА У ВАС ДОМА

А. ПАНЦУЛАЯ

Если вы любите книги о морских путешествиях, приключениях, каравеллах, бригах и пиратах, то, наверное, вам доводилось читать о том, как иногда на корабельных реях, вантах, бушпритах и даже клотиках появляются странные светящиеся точки — огни святого Эльма. Издавна тайна окутывала эти огоньки. Никто даже толком не знал, сулят они горе или удачу. Один из последних конкистадоров Николай Гумилев украсил ими знаменитый корабль «Летучий Голландец»:

«Но знак печали и несчастий,
Огни святого Эльма светятся,
Усеяв борт его и снасти».

Более оптимистично смотрел на знаменитые огни Франсуа Рабле, биограф веселых толстых великанов Гаргантюа и Пантагрюэля. Во время шторма корабль путешественников был близок к гибели, и лишь появление огней святого Эльма вселило уверенность в моряков и, в конечном счете, помогло спастись.

В наше время, время расцвета науки и техники, легко можно получить огни святого Эльма, не отправляясь в морское путешествие, не связывая свою судьбу с пиратами и великанами и даже не выходя из своей квартиры. Что же нужно для этого? Оказывается — пьезоэлектрическая зажигалка для газовой плиты. Зажигалки бывают разных моделей, но у всех них есть общие элементы — клавиша и изолированный от корпуса электрод (вторым электродом является корпус).

Но вот вы взяли в руки зажигалку и нажали на клавишу — между электродом и корпусом с характерным треском проскочила искра. Вы получили так называемый искровой разряд. Наверное, вам доводилось не раз наблюдать гигантскую природную искру — молнию, проскакивающую между двумя облаками или между облаком и землей. Вернемся, однако, к зажигалке.

Известно, что, для того чтобы в воздухе проскочила электрическая искра, напряжение между соответствующими электродами должно быть очень большим — порядка нескольких киловольт. Откуда же такое напряжение появляется в зажигалке? Ведь там нет батарейки и она не подсоединяется к электросети. Оказывается, все дело в интересном и важном физическом явлении — пьезоэффекте (помните — зажигалка-то пьезоэлектрическая). В чем же суть этого явления?

Давайте представим себе кристалл со структурой ячейки, изображенной на рисунке 1. Заштрихованные кружки — это его положительные ионы, светлые — отрицательные. Хотя на грани *A* выступают положительные заряды, а на грани *B* — отрицательные, в целом кристалл и его поверхность электронейтральны. Поместим наш кристалл между обкладками и сожмем их. Положительный ион *1* и отрицательный ион *2* вдавятся внутрь ячейки, отчего выступающие заряды (на плоскости *A* — положительные, а на плоскости *B* — отрицательные) уменьшатся. Иначе говоря, на плоскости *A* возникнет некий отрицательный заряд, а на плоскости *B* — такой же положительный, т. е. появится разность потенциалов. При растяжении кристалла вся картина изменится на противоположную — ионы *1* и *2* будут выталкиваться из ячейки, на пло-

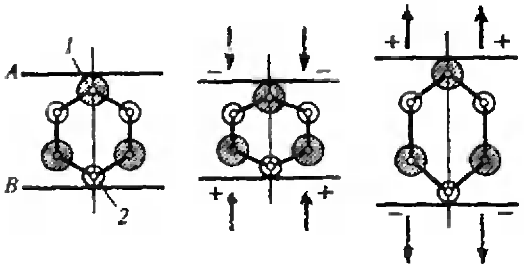


Рис. 1.

скости A возникнет дополнительный положительный заряд, а на плоскости B — отрицательный. Так вот, пьезоэффект и состоит в том, что при деформации некоторых кристаллов между их гранями возникает электростатическое напряжение.

Теперь, когда мы знаем принцип работы пьезозажигалки, легко превратить ее в источник высокого напряжения. Один из возможных способов показан на рисунке 2. На выступающий электрод надевается металлическая трубка (скажем, отслуживший свой век стержень шариковой ручки). Трубка надежно изолируется от корпуса, затем к ней и к корпусу подпаиваются провода — и источник напряжения готов. Имейте в виду, что 10 киловольт — это очень большое напряжение, так что будьте осторожны и ни в коем случае не беритесь за оба провода руками! Если вы обещаете соблюдать все меры предосторожности, можете провести ряд самостоятельных экспериментов.

Возьмите перегоревшую электрическую лампочку, подсоедините к цоколю провод A, а провод B прижмите к стеклянной колбе (рис. 3). Погасите в комнате свет, нажмите и отпустите клавишу зажигалки, и в лампочке возникнут искры между нитью накала и стеклом колбы. Потренировавшись, вы сможете получить разряды различных типов, в том числе и огни святого Эльма.

Поднесите магнит к стеклу колбы, и вы сможете увидеть, как светящиеся шнуры будут отклоняться к полюсу магнита. А что произойдет, если поднести два магнита?

Вы можете изготовить даже электронный двигатель — мечту всех писателей-фантастов. Помните, как работает сегнерово колесо (рис. 4, *а*)? Вода, вырываясь из трубок, обеспечивает всему колесу вращательное движение. А теперь представьте себе, что вместо воды из трубок летят электроны — если их достаточно много и летят они достаточно быстро, колесо тоже должно завертеться. Весь вопрос в том, как изготовить такой механизм. Но если вы аккуратны и терпеливы, для вас это не составит большого труда. Вырежьте из тонкой металлической фольги «пауч-

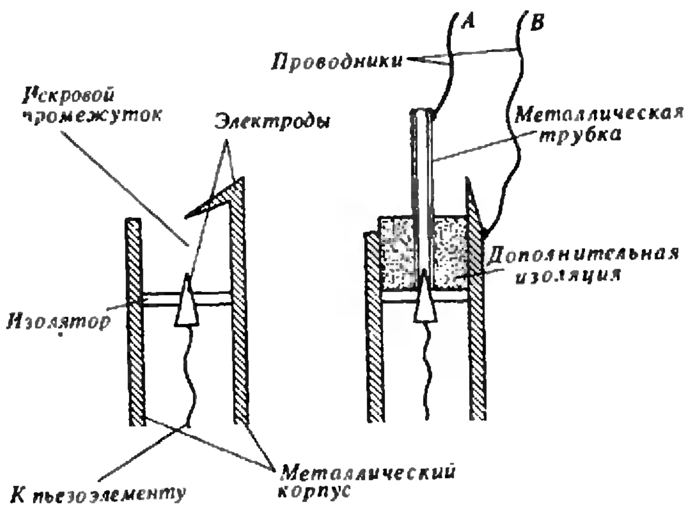


Рис. 2.

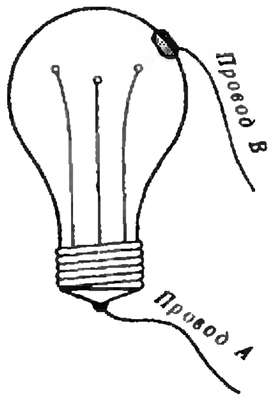


Рис. 3.

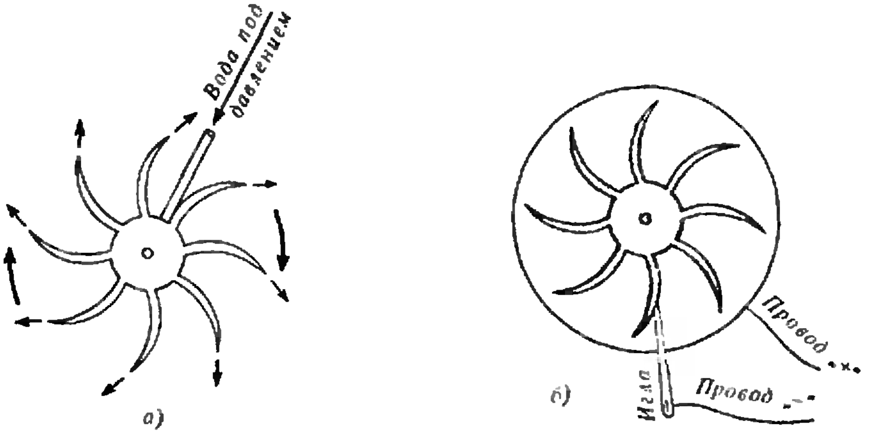


Рис. 4.

ка», похожего на того, что изображен на рисунке 4, *б*. Насадите его на тонкую иголку так, чтобы от легкого дуновения он мог вращаться, иглу соедините с проводом «–» от зажигалки (конечно, «+» или «–» зависит от того, нажимаете вы на клавишу или отпускаете ее, но, проведя опыты с лампой, вы уже знаете, когда можно получить «–»), а другой провод (предварительно сняв с него изоляцию) согните петлей и поместите внутрь нее «паучка». Теперь, если электрическое напряжение будет достаточным, с ножек «паучка» начнут стекать электроны, и «паучок» закрутится. Вам потребуется определенная сноровка и настойчивость в проведении этого эксперимента — «паучок» может перекашиваться и слетать с иглы, но зато в случае успеха в ваших руках окажется настоящий электронный двигатель.

(Начало см. на с. 34)

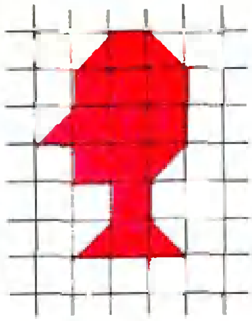
ровское) 53, 54, 64, 66, 67; *Ю. Маравин* (Евпатория) 53, 55, 57—59, 63, 64, 67; *М. Махмудов* (Исфара) 53—55, 57, 62; *Р. Махмудов* (Бугульма) 63, 64; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 54, 63—65, 67; *В. Меркер* (Старый Оскол) 63, 64; *С. Мурин* (Брест) 53, 54, 57; *А. Нежуренко* (Киев) 53—55, 57—59, 61—67; *А. Немировский* (Одесса) 55, 63, 66, 67; *О. Никипорец* (Алма-Ата) 54, 55, 57, 59, 61; *И. Николаенко* (Армавир) 53—55; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 53—57, 59, 62; *А. Ольховец* (Киев) 63—67; *Д. Островский* (Ленинград) 53, 57, 63, 64, 66, 67; *Д. Пастухов* (Витебск) 53—55, 57, 63—66; *Р. Пашутин* (Тула) 53, 55; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 53—55; *Д. Петрайтис* (Вольск) 63, 67; *В. Писляков* (Тверь) 63, 64, 67; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 54, 63, 64, 67; *С. Польшин* (Харьков) 53—55, 58, 59, 61—63, 65—67; *В. Попов* (Жуковский) 64—67; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 55, 57—59, 64, 65; *В. Попова* (с. Котово) 64; *С. Попруженко* (Прохладный) 53; *Д. Потишко* (Харьков) 54; *Ю. Радченко* (Волжский) 55, 64; *А. Ручьев* (Северодвинск) 53, 54, 57, 59, 61, 62; *Д. Селиверстов* (Обнинск) 54; *В. Сергиенко* (Брест) 63, 64, 67; *Д. Скотников* (Владимир) 59, 62—64, 66, 67; *А. Смирнов* (Москва) 63, 67; *А. Снежко* (Киев) 53—55, 57; *А. Соклаков* (Брест) 55, 63—67; *В. Солдаткин* (Ростов-на-Дону) 55; *А. Стельмах* (Киев) 63, 65, 66; *Д. Степанов* (Брест) 67; *А. Столповская* (Днепрорудный) 53, 63, 64, 67; *Д. Супрун* (Минск) 53, 61, 63, 64, 66, 67; *В. Сусиков* (Брест) 67; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 53—57, 63—67; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 53, 55, 64, 67; *В. Толкачев* (Выборг) 64, 66, 67; *М. Томилко* (Брест) 53, 54, 57; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 53—55, 59, 61, 63, 64, 66, 67; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 53—55, 57, 59, 61—64, 66, 67; *А. Тумашевский* (Северодвинск) 63, 64, 67; *О. Уразаев* (Коломна) 54; *В. Усенко* (Киев) 64; *Д. Хаимов* (Баку) 54; *М. Хакимов* (Жуковский) 63, 64, 66, 67; *А. Харисов* (Уфа) 63, 64, 67; *А. Хмелев* (Свердловск) 53—55; *К. Ходжаев* (х/с Худайбердиева Наманганской обл.) 55; *Р. Храбров* (Северодвинск) 53—57, 59, 62; *А. Цветков* (Киев) 54; *А. Чарушин* (Новосибирск) 58, 60, 61, 63, 67; *Ц. Чешков* (София, Болгария) 53—55, 57—59, 61, 63—67; *А. Чистый* (Брест) 53—55, 57, 63—67; *С. Чупахин* (Москва) 63, 64, 66, 67; *Г. Шаповалов* (Киев) 53, 54, 57, 59, 62; *С. Шаракин* (Москва) 63, 66, 67; *А. Шпагин* (Мариуполь) 53—55, 63, 64; *О. Шпырко* (Киев) 53—55, 58—60, 62—67; *И. Шуляк* (Киев) 53—55, 59, 61, 62; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 53, 54, 57, 59—66; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 53—56, 58, 59, 61, 63, 64, 66; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 53—55, 61, 63, 64, 66.

Калейдоскоп „Кванта"

Площадь

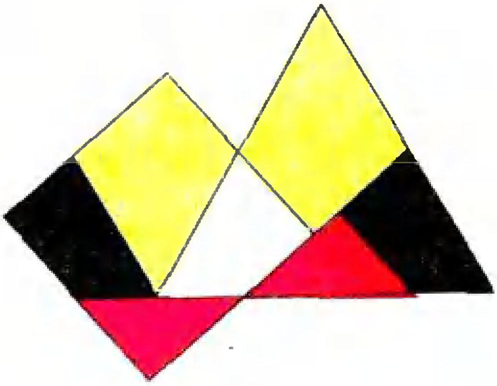
Мастер-плиточник — человек, который в процессе своей работы все время занимается измерением площадей. Покрыв стену плитками, он может легко определить площадь стены (в плитках), сосчитав количество уложенных плиток. Но на самом деле он *всегда* решает обратную задачу: сначала измеряет площадь стены, а потом вычисляет необходимое количество *плиток*.

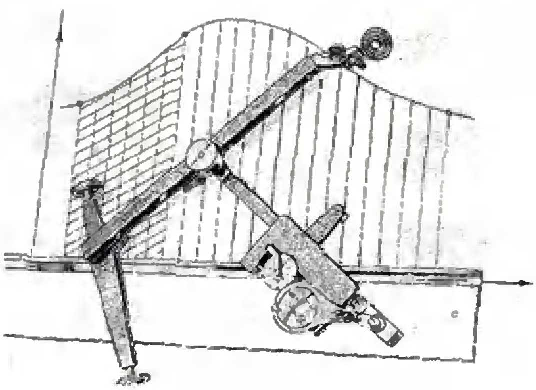
«Способ плиточника» оказывается полезным и при вычислении площадей сложных фигур. Нанесем квадратную сетку на прозрачную бумагу и наложим ее на фигуру. Тогда ее площадь будет не меньше, чем количество квадратиков сетки, лежащих целиком внутри фигуры, и не больше, чем количество клеток, имеющих общие точки с этой фигурой. Такая сетка называется палеткой.



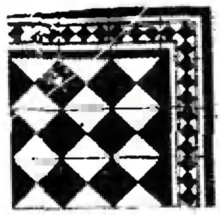
Любопытно, что площадь многоугольника, все вершины которого *лежат в узлах* квадратной сетки, выражается довольно простой формулой: $S=n+\frac{m}{2}-1$, где n — *количество узлов* сетки, лежащих внутри многоугольника, а m — количество узлов, лежащих на его границе (в частности, в вершинах). Она называется «формулой Пика».

Конечно же, при вычислении площадей простейших геометрических фигур — многоугольников — палетка явно ни к чему. Но верные способы их нахождения были придуманы далеко не сразу. Так, древние вавилоняне считали, что площадь четырехугольника равна произведению полусумм противоположных сторон. Отсюда следует такое нелепое утверждение: если у двух ромбов равны стороны, то равны и площади. Лишь после открытия верной формулы для площади треугольника (а неверных было предложено предостаточно) стало возможным легко считать площадь *любого многоугольника*, разделив его предварительно на треугольники.





Конечно же, всякий многоугольник можно многими способами разрезать на треугольники. Ясно, что если два многоугольника так разрезаны на треугольники, что полученные наборы тре-

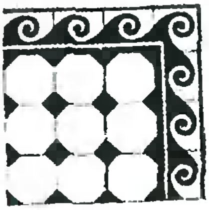


угольников одинаковы, то площади этих многоугольников равны. Как ни удивительно, но верно и обратное утверждение: если два многоугольника равновелики, то они и равносоставлены, т. е. могут быть разрезаны на одинаковые наборы многоугольников (а значит, и треугольников). Получить такое разрезание не всегда просто. Попробуйте-ка разрезать на одинаковые части рав-

носторонний треугольник и равновеликий ему квадрат! А для многогранников подобное утверждение уже неверно: нельзя, например, разрезать на одинаковые части *правильный* тетраэдр и равновеликий ему куб.

С развитием науки и техники возникла острая потребность вычислять площади не только многоугольников, но и произвольных фигур. Первые шаги здесь сделали Архимед и Б. Кавальери, а окончательно решили проблему

И. Ньютон и Г. Лейбниц, создавшие интегральное исчисление, частью которого является и вычисление площадей фигур, ограниченных заданными кривыми.



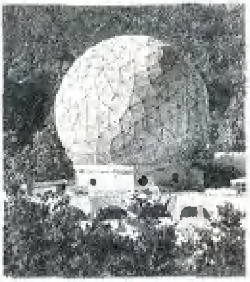
На основе методов интегрирования были сконструированы разнообразные *планиметры* — приборы, с помощью которых можно измерять площадь фигуры, например, обводя границу фигуры специальным указателем.

А как быть с площадями криволинейных поверхностей? Что понимать под площадью такой поверхности? В этом случае естественно рассматривать многогранную поверхность с вершинами в точках этой поверхности. Если рассмотреть такие многогранники со все более мелкими гранями, то предельная величина этих многогранных поверхностей и принимается за площадь данной криволинейной поверхности. Конкретное вычисление площадей таких по-

верхностей также производится методами интегрального исчисления.

Многие из вас знают, что из всех фигур, имеющих данный периметр, наибольшую площадь имеет круг. Задача о нахождении фигуры наибольшей *площади при* заданном периметре называется *изопериметрической задачей* или *задачей Дидоны* (по имени основательницы и первой царицы города Карфагена).

Она была изгнана со своей родины и решила поселиться на африканском побережье Средиземного моря. Местные жители *разрешили* ей владеть участком земли, который «объемлет воловья шкура». Хитрая Дидона разрезала шкуру на тонкие ре-



мешки, которыми окружила значительную площадь. В дальнейшем появилось множество подобных задач, общие методы их решения породили математическую науку *вариационное исчисление*.

Слово об учителе Волкове

Однажды «Пионерская правда» попросила читателей назвать свою любимую сказку. Большинство ребят ответило: «Волшебник Изумрудного города».

Эту сказочную повесть, как и ее продолжения — «Урфин Джюс и его деревянные солдаты», «Семь подземных королей», «Огненный бог марранов» и другие — любят не только дети, но и взрослые: папы и мамы, бабушки и дедушки. Однако не все помнят, кто написал их.

Автор этих знаменитых книг, Александр Мелентьевич Волков, родился 100 лет назад, 15 июня 1891 года. Много лет он был учителем в маленьком тогда городке Усть-Каменогорске (теперь — центре Восточно - Казахстанской области). Преподавать приходилось почти все предметы — русский язык и литературу, естествознание и географию, историю, математику и физику.

В своем «медвежьем углу» учитель Волков больше всего боялся отстать от новейших достижений науки. Совершались революции, гремели войны, жизнь была тяжелой и голодной. Учителю Волкову, как и всем, приходилось терпеть лишения, но в любых обстоятельствах он продолжал учиться — учился сам, чтобы иметь право учить других.

В 1931 году сорокалетний Волков, отец двоих детей, «на отлично» сдал все экзамены за пятилетний курс физико-математического факультета Московского университета и вскоре стал доцентом кафедры высшей математики столичного Института цветных металлов и золота.

Он создал интересные математические труды и, наверное, мог бы быть и профессором, и академиком. Но Александр Мелентьевич увлекся писанием книг для детей. Сочиняя их, он, вероятно, вновь чувствовал себя учителем, только теперь его уроки шли в огромном классе, вмещавшем тысячи и тысячи учеников — читателей. Среди его произведений — повести «Чудесный шар», «Царьградская пленница», исторические романы «Зодчие», «Скитания»; его герои — отважные и талантливые люди — изобретатели, мореплаватели, строители... Но мало кому известно, что Волков писал и научно-популярные книги («Земля и небо», «В поисках правды» и другие).

Книга «Великий счет» (очерки по истории математики) не была издана и сохранилась лишь в рукописи. Мы публикуем главу из нее, посвященную первому на Руси учебнику арифметики.

А. Розанов

АРИФМЕТИКА ЛЕОНТИЯ МАГНИЦКОГО

А. ВОЛКОВ

Что сказали бы вы, читатель, если бы вам пришлось ежедневно отправляться в школу с учебниками, весом каждый по два-три килограмма? Наверно, вы жаловались бы, что вам тяжело — и не в переносном, а в буквальном смысле слова. Так посочувствуйте же школьникам XVIII века, которым действительно приходилось таскать такие книги.

Учебник арифметики Магницкого представлял из себя огромный том, напечатанный славянским шрифтом, в прочном кожаном переплете, и весил он 6—7 фунтов! Вот сокращенное заглавие этой книги:

«Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведена, и во едино собрана, и на две книги разделена. Ныне же повелением благочестивейшего великого Государя нашего Петра Алексиевича в богоспасаемом царствующем граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков, и всякого чина и возраста людей в свет произведена, в лето от сотворения мира 7211».

Фамилия автора помещена мелкими буквами в рамочке, окружающей заглавный лист, и не всякий сразу ее увидит!

О жизни первого русского математика Леонтия Филипповича Магницкого сохранились скудные сведения. О происхождении его ничего не известно. Учился он в московской славяно-греко-латинской академии в промежутке от 1686 до 1694 года, впоследствии был преподавателем школы математических и навигационных наук в Москве. Знаменитый свой учебник Магницкий писал в самом конце XVII и начале XVIII века, а печаталась книга со 2 февраля 1701 года по 1 января 1702 года. За время печатания автор получал «кормовые деньги» по 5 алтын (1 алтын=3 копейки) в день (таковы были авторские гонорары в те времена!) и за все время получил 49 рублей 31 алтын и 4 деньги (49 руб. 95 коп.) Впоследствии, впрочем, Магницкий был награжден лучше за свои труды по просвещению: царь наградил его деревнями во Владимирской и Тамбовской губерниях, и ему был выстроен дом на Лубянке. Погребен был Магницкий в церкви Гребенской Богородицы у Никольских ворот; его могилу нашли во время постройки 1-ой очереди московского метро.

Труд Магницкого есть целая энциклопедия математических и естественно-исторических знаний той эпохи. Автор включил в свою книгу арифметику, алгебру, сведения по астрономии, навигации, физической географии, геодезии. Через всю книгу проходит основная мысль: изучение явлений природы при помощи числа и меры.

Сочинение Магницкого было, конечно, несамостоятельным, составленным по иностранным источникам; сам автор сообщает, что он пользовался греческими, латинскими, немецкими и итальянскими книгами. Но, приспособляя материал к интересам и пониманию русского читателя, он многое добавлял и от себя:

Елико же в них изобретохом,
В достойнех местех приплетохом.

Влияние иностранных составителей на русских составителей учебников ясно чувствуется даже в терминологии. Почти все математические действия и преобразования носили двойные названия — русские и итальянские: счет или нумерацио, сложение или аддицио, вычитание или субтракцио, умножение или мультипликацио, деление или дивизио и т. д.

Следуя обычаям того времени, Магницкий дает правила действий без объяснений и почти каждую главу снабжает нравоучительными стихами. Он уговаривает учащихся учить таблицу умножения:

Аще кто не твердит
Таблицы и гордит,
Не может познати
Числом что множати
И во всей науке
Не свобод от муки.
Колико не учит,
Туне ся удручит.

Закончив первую часть книги, Магницкий поздравляет учащихся такими стихами:

Первую часть окончивше
И вся в целых изучивше
Их в памяти твердо держим
И за та вся бога блажим,
Что даде нам без напасти
Зрети конец первой части.

Значит, арифметика была трудной наукой, если ученикам приходилось благодарить бога за то, что им удалось «без напасти» выучить целые числа. А напасти нередко случались с учениками в петровскую эпоху, когда царь издал указ: «Выбрать из гвардии отставных добрых солдат и быть им по человеку во всякой каморе и иметь хлыст в руках; и буде кто из учеников будет бесчинствовать, оным бить, несмотря какой бы виновный фамилии не был». Эти же солдаты следили за тем, чтобы ученики, великовозрастные дворянские недоросли, набранные в школы насильно, не разбегались от ученья по домам. Зато те, кто сумел дотянуть до конца, получали выгодные государственные должности. Вот когда оправдывалась пословица: корень учения горек, а плоды его сладки!

Чтобы приохотить учащихся к математике, Магницкий дает занимательные задачи. Вот образец таких задач:

«Некогда в Константине граде 20 человек мыяхуся в бане, в них же бяху христиане, турки же и евреи, а установлено имати за баню с турченина по полденге, а с христианина по денге, с евреина же по три денги. Но всех бывших в бане есть 20 человек, дали же бяху обще от всех 20 денег. И ведателно есть, колико бяху христиан, турок же и евреев».

В книге Магницкого чувствуется главная задача — помочь купцу и промышленнику, мореплавателю, военачальнику, так как именно такие люди играли громадную роль в России после реформ Петра Великого. Автор говорит:

В первой общая вся гражданства
Коего либо государства
Арифметика обычайная,
В купецких делах случайная
Цену товаров обретати
И достойно ю исчисляти.
А не точию тому чину
Но и всем людям требна выну
Ремесленникам и художным
Подданным всяким и вельможным.

Магницкий с трогательной любовью к родине пишет:

И желаем, да будет сей труд
Добре пользовать русский весь люд.

В истории русского просвещения книга Магницкого сыграла крупную роль. Первый русский ученый Михайло Ломоносов самоучкой учился по ней, знал ее почти наизусть. До конца жизни Ломоносов сохранил любовь к этой книге, открывшей ему глаза на мир и увлекшей его с далекой северной окраины в Москву, и называл ее «вратами учености».

Качественные задачи по физике

Как дерево спасает от дождя?

...кажется, дождик собирается, кажется, дождик собирается...

А. Милн

Зададимся чрезвычайно простым вопросом: каким образом дерево укрывает от дождя? Конечно, о пальме, листом которой можно укрыть стадо слонов, речь не идет. Но ведь от дождя можно спрятаться и под елью, и под березой. Что же происходит при этом?

Не спешите с ответом, который напрашивается сам собой,— что капли задерживаются на листьях. Ведь больше двух-трех капелек на листе не удержится. Не думайте, что капли испаряются с листьев во время дождя,— влажность столь велика при дожде, что даже белье не сохнет.

Как же маленькие листья, а тем более еловые или сосновые иглы, спасают от дождя? Или мы обманули себя, спрятавшись под дерево, когда «... разыгралась непогода: молния так и сверкала, а дождь лил как из ведра» (Г. Х. Андерсен)?

А теперь

О «велосипедной» задаче

(См. «Квант» № 1)

Дело в том, что велосипедист не «стоит» на спицах, а... «висит» на них. Действительно, для того чтобы часть спиц согнулась, обод колеса должен вытянуться в эллипс. Но при этом другие спицы растянутся, а именно это со стальными прутами сделать невозможно. Попробуйте на досуге растянуть спицу. Как говорят (обычно басом) специалисты по сопротивлению материалов, спицы «работают» не на сжатие, а на растяжение. Поэтому сделать из круглого обода эллипс, а следовательно, и согнуть спицы — невозможно.

Подумайте, почему при ударе из колеса получается «восьмерка»? Как она выглядит?

Хотя изобретать велосипед уже не стóит, оказывается, усовершенствовать его можно, заменив спицы... нитками. В японских гоночных велосипедах, например, спиц нет, а ось с ободом соединены сплошным куском почти обычной*) ткани. Сделано это не для того, чтобы любопытные задумались. И не для того, чтобы задумавшиеся убедились в том, что спицы работают на растяжение. Замена спиц сплошным куском материала увеличивает прочность колеса, уменьшая его вес, и делает его более «обтекаемым».

И напоследок — маленький отрывок об одном невезучем, но упорном велосипедисте. Пусть этот отрывок еще раз заставит задуматься о прочности такой хрупкой и неустойчивой, на первый взгляд, конструкции, как велосипед.

«И велосипед его, он тоже очень состарился. Он был неизвестной марки, такой древней, что специалисты о ней никогда не слыхивали. Краска с него облупилась, и даже ржавчина не была видна под слоем грязи и пыли. В колесах почти не было спиц, но пяти-шести оставшихся было достаточно, чтобы выдержать Мартена. От колес остались одни ободья; когда он ехал, раздавался страшный лязг железа...» (Марсель Эме)

Е. Гурович

*) Разумеется, в японском смысле этого слова.

„Квант" улыбается

Мой анекдотарий

Известный теоретик и геофизик сэр Гарольд Джеффриз одно время был консультантом какой-то нефтяной компании. Однажды он присутствовал на проходившем в Лондоне совещании и тихо сидел в уголке, пока все были заняты обсуждением различных проблем. Часа через два обсуждение приостановилось и сэру Гарольду был задан вопрос: «А что вы думаете?» «Я думаю, что пора выпить кофе». После перерыва специалисты продолжили дискуссии. Через некоторое время снова был задан тот же вопрос. «Я думаю, что пора отправляться на обед»,— последовал ответ. Во второй половине дня произошло то же самое, только теперь было пора пить чай. Совещание подошло к концу и сэру Гарольду задали все тот же вопрос: «А теперь, сэр Гарольд, когда вы прослушали все до конца, что вы скажете по этому поводу?» «Я рад, что это ваша проблема, а не моя»,— ответил ученый.

* * *

Среди физиков есть и такие, которые обожают розыгрыши. К их числу принадлежал Роберт Вуд. Он увлекался фотографией и как-то захотел сфотографировать мост объективом «рыбий глаз». Но стоило ему установить аппаратуру, как вокруг него собиралась толпа зевак. Тогда он выкрасил аппарат в ярко-красный цвет, навел его и со всех ног бросился прочь, как будто тот вот-вот взорвется. Зеваки последовали его примеру, и аппарат запечатлел, наконец, мост без человеческих фигур. В другой истории фигурируют Вуд и Норберт Винер, которые якобы положили в чемодан очень тяжелый гироскоп. Этот гироскоп можно было раскрутить с помощью веревки, пропущенной через отверстие в крышке. Выходя из вагона, Вуд запустил гироскоп и дал чемодан носильщику. Все шло хорошо, пока Вуд резко не свернул за угол. Носильщик попытался следовать за ним, и чемодан встал на попа, вызвав среди присутствовавших большое замешательство.

* * *

Замечательную историю рассказывают о Кене Гранте из Аделаидского университета. С помощью электромагнита он привесил к потолку большой стальной шар. В ходе демонстрации опыта электромагнит отключали и шар падал в подставленное для этой цели ведро с песком. Естественно, как-то раз студенты чуть сдвинули ведро, и шар упал мимо, оставив в бетонном полу солидную трещину. На следующий год Грант тщательно пометил крестиком то место на полу, куда должен падать шар, и на него поставил ведро. На сей раз студенты не стали двигать ведро, они просто стерли старый крестик и нарисовали другой недалеко от первого. Грант вошел в аудиторию, увидел крестик, с торжествующей улыбкой переставил ведро и... выключил электромагнит.

Р. Эдж

Школа в „Кванте"

Математика 9 — 11

Комплексные числа

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Уже в древности при решении задач, записываемых на современном языке квадратными уравнениями, математики столкнулись с ситуациями, в которых было необходимо извлекать корни из отрицательных чисел. В таких случаях считали задачу неразрешимой. Однако решение в радикалах кубического уравнения, найденное итальянскими математиками в первой половине шестнадцатого века, приводило к выражению *действительных* корней уравнения через квадратные корни из отрицательных чисел. Это заставило математиков оперировать новыми числами, применяя для них те же правила действий, которым подчиняются действительные числа.

Рассмотрим задачу извлечения квадратного корня из отрицательного числа $\sqrt{-a}$. Так как квадрат действительного числа всегда положителен, то такая задача в области действительных чисел невозможна. Нужны какие-то новые числа:

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{a}\cdot i,$$

где $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$ — обозначение нового, не действительного числа, называемого мнимой единицей.

Числа вида

$$a+bi,$$

где a и b — действительные числа, носят название *комплексных чисел;* число a называется *действительной частью*, а число b — *мнимой частью.* При $a=0$ комплексное число обращается в *чисто мнимое число* bi; при $b=0$ получим число $a+0i$, которое рассматривается как *действительное число* a.

Комплексные числа вида $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются *сопряженными*, комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются *противоположными.* Множество комплексных чисел обычно обозначается через C.

Условимся считать комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ равными в том и только в том случае, когда $a=c$ и $b=d$.

Из этого определения вытекает, что комплексное число $a+bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$. В самом деле, действительное число 0 может быть представлено в виде комплексного числа как $0+0i$. На основании определения, равенство $a+bi=0+0i$ будет иметь место только лишь при условии $a=0$ и $b=0$.

Заметим, что относительно комплексных чисел не принято соглашения, какое из них считать больше другого.

Упражнения

1. Найдите x и y, для которых

$$(2x+3y)+(x-y)i=2+(2x+y)i.$$

2. Найдите комплексные числа, противоположные и сопряженные с числами

а) $2+i$; б) $1+i$.

3. Какие комплексные числа совпадают со своими сопряженными? Противоположными?

Действия над комплексными числами

Условимся производить над комплексными числами алгебраические действия и преобразования по тем же правилам, по которым они производятся над действительными числами, принимая всегда, что $i^2=-1$. Это соглашение служит основой для операций над комплексными числами. Чтобы выполнить какое-нибудь действие над комплексными числами вида $a+bi$, надо выполнить соответствующее действие над двучленами такого вида по правилам, которые существуют для многочленов с действительными коэффициентами, и затем в результате заменить i^2 на -1.

Сложение

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Из этого правила легко усмотреть, что сложение комплексных чисел обладает теми же свойствами, которыми обладает сложение действительных чисел, т. е. переместительным и сочетательным свойствами.

Вычитание

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Отметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться числом действительным; например, сумма сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$ равна $2a$.

Умножение

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Подобным образом можно составить произведение трех и более комплексных чисел.

Заметим, что произведение двух сопряженных, не равных нулю, чисел $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ равно положительному действительному числу a^2+b^2. В самом деле:

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-$$
$$-b^2i^2.$$

Но $i^2=-1$, следовательно,

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Деление

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-d^2i^2}=$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Возведение в степень

Прежде всего, выясним, что происходит при возведении в степень мнимой единицы i с учетом условия $i^2=-1$. Мы имеем:

$$\begin{array}{ll} i^1=i; & i^5=i^4\cdot i=i; \\ i^2=-1; & i^6=i^4\cdot i^2=-1; \\ i^3=-i; & i^7=i^4\cdot i^3=-i; \\ i^4=1; & i^8=i^4\cdot i^4=1\ldots \end{array}$$

Таким образом, получаются четыре чередующихся значения:

$$i;\ -1;\ -i;\ +1.$$

Заметим еще, что число i^0 принимается равным 1.

Теперь нетрудно найти результат возведения в степень комплексного числа $a+bi$;

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+$$
$$+2abi;$$

$$(a+bi)^3=a^3+3a^2(bi)+3a(bi)^2+(bi)^3=$$
$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

Упражнения

4. Выполните действия

а) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;

б) $\dfrac{2+i}{1+i}-\dfrac{2}{i}$;

в) $(1+i)^{100}$;

г) $(1+i\sqrt{3})^9$;

д) $(1+i\operatorname{tg}\alpha)^3$.

5. Найдите все комплексные числа z, для которых

а) $iz+3=2i$;

б) $\dfrac{z+1}{z-i}=\dfrac{3-i}{3+i}$;

в) $2z+i\bar{z}=1+3i$.

Извлечение квадратного корня

Положим

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

Тогда

$$a+bi=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi,$$

т. е.

$$x^2-y^2=a,\ 2xy=b.$$

Следовательно, задача сводится к нахождению действительных решений этой системы. Возведя оба уравнения в квадрат, а затем сложив их, получим

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2;\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2},$$

(берется только положительный корень, поскольку $x^2+y^2>0$). Теперь из уравнений

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2},\ x^2-y^2=a$$

находим

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\ y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

Для x и y имеем по два значения, что дает четыре комбинации $(x;\,y)$, однако из условия $xy=b/2$ вытекает, что знак у произведения xy должен совпадать со знаком числа b; это дает только две пары значений $(x;\,y)$, т. е. два корня:

$$\sqrt{a+bi}=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

$$b>0,$$

$$\sqrt{a+bi}=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

$$b<0.$$

Упражнение 6. Вычислите

а) $\sqrt{1+i}$; б) $\sqrt{3+4i}$;

в) $\sqrt{4-3i}$;

г) $\sqrt{\cos\alpha+i\sin\alpha}$ $(0<\alpha<\pi)$;

д) $\sqrt{\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha}$.

Решение квадратного уравнения

Хорошо известно, что не любое квадратное уравнение может быть решено в действительных числах; условием разрешимости является неотрицательность его дискриминанта $D=b^2-4ac$. В комплексных числах это исключение исчезает. Если $D<0$, то решения квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\cdot i}{2a}.$$

Иными словами, каковы бы ни были коэффициенты a, b и c квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

его решения находятся по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Заметим также, что эта формула позволяет решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами a, b, c. Ведь мы уже умеем извлекать квадратные корни из любых комплексных чисел.

Упражнения

7. Решите квадратные уравнения

а) $x^2+2x+2=0$;

б) $x^2+(1+i)x+i=0$;

в) $ix^2-2x+1=0$.

8. Найдите все корни (комплексные) уравнений

а) $x^3=1$;

б) $x^4=-1$;

в) $x^4+x^2+1=0$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Слово «комплексный» в переводе с латыни означает «составной», «сложный». Несмотря на то, что оперировать с комплексными числами ничуть не сложнее, чем с действительными, до начала девятнадцатого столетия комплексные числа рассматривались как очень сложный, темный, почти мистический объект. С упорством, достойным лучшего применения, велась длительная борьба между сторонниками и противниками «мнимых» чисел. Главное возражение противников заключалось в следующем: выражение вида $a+bi$ лишено смысла, поскольку i не является действительным числом, а значит, и вообще не является числом; поэтому i нельзя умножать на действительные числа.

Чтобы поставить теорию комплексных чисел на прочный фундамент, необходима была явная их конструкция, лучше всего — геометрическая. Желание иметь геометрическую реализацию множества комплексных чисел не случайно, если вспомнить, что и множество действительных чисел не отделимо для нас от «действительной прямой» с фиксированной на ней точкой, изображающей ноль, и с фиксированным масштабом, определяемым положением числа 1.

Впервые геометрическое изображение действий над комплексными числами было дано датским геодезистом К. Весселем в 1799 году и независимо от него французским математиком Ж. Арганом в 1806 году. Однако общее признание оно получило лишь в тридцатых годах прошлого столетия после работ немецкого математика Ф. Гаусса и английского математика У. Гамильтона. Идея геометрической интерпретации комплексных чисел заключается в том, что они изображаются не точками прямой, как действительные числа, а точками плоскости.

Итак, построим множество, элементы которого были бы точками плоскости, а сложение и умножение точек подчинялись бы всем правилам операций с действительными числами.

Выберем в плоскости прямоугольную систему координат с осью абсцисс x и осью ординат y. Обозначим через $(a; b)$ точку с абсциссой a и ординатой b. Для точек $(a; b)$ и $(c; d)$ определим сумму и произведение по правилам:

$$(a; b)+(c; d)=(a+c; b+d), \tag{1}$$

$$(a; b)\cdot(c; d)=(ac-bd; ad+bc). \tag{2}$$

Прямой проверкой без труда устанавливается, что операции сложения и умножения точек обладают переместительным и сочетательным свойствами:

$$(a; b)+(c; d)=(c; d)+(a; b),$$

$$((a; b)+(c; d))+(e; f)=(a; b)+((c; d)+(e; f)),$$

$$(a; b)\cdot(c; d)=(c; d)\cdot(a; b),$$

$$((a; b)\cdot(c; d))\cdot(e; f)=(a; b)\cdot((c; d)\cdot(e; f)).$$

Выполняется и распределительный закон:

$$((a; b)+(c; d))\cdot(e; f)=(a; b)\cdot(e; f)+(c; d)\cdot(e; f).$$

Точка $(1; 0)$ служит единицей, т. е. для любой точки $(a; b)$

$$(a; b)\cdot(1; 0)=(1; 0)\cdot(a; b)=(a; b).$$

И наконец, для любой точки $(a; b)\neq(0; 0)$ существует единственная такая точка $(x; y)$, что

$$(a; b)\cdot(x; y)=(1; 0).$$

Докажем последнее свойство. Возьмем какую-нибудь ненулевую точку $(a; b)$ (это означает, в частности, что $a^2+b^2>0$). Нам нужно найти такую точку $(x; y)$, чтобы $(a; b)\cdot(x; y)=(1; 0)$. Но

$$(a; b)\cdot(x; y)=(ax-by; ay+bx).$$

Следовательно, мы получаем систему уравнений

$$ax-by=1,\ ay+bx=0.$$

Решая эту систему уравнений относительно x и y, найдем

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

Этим все доказано.

Итак, мы превратили точки на плоскости в числовое множество, т. е. множество с операциями сложения и умножения, для которых верны все свойства сложения и умножения обычных действительных чисел. Действительные числа содержатся в этом множестве — это точки вида $(a; 0)$. В самом деле, сложить и перемножить такие точки — это попросту сложить и перемножить действительные числа:

$$(a; 0)+(c; 0)=(a+c; 0),$$

$$(a; 0)\cdot(c; 0)=(ac; 0).$$

А теперь возьмем точку $(0;1)$. Посмотрим, что произойдет, если мы возведем ее в квадрат, т. е. умножим саму на себя:

$$(0;\,1)^2=(0;\,1)\cdot(0;\,1)=(-1;\,0).$$

Таким образом, $(0,1)^2$ — это действительное число -1. Значит, точку $(0,1)$ можно интерпретировать как мнимую единицу i, срывая, тем самым, с нее мистический покров. И наконец, любую точку $(a;b)$ можно представить в виде

$$(a;\ b)=(a;\ 0)+(0;\ b)=(a;\ 0)+$$
$$+(b;\ 0)\cdot(0;\ 1).$$

Если $(a;0)$ и $(b;0)$ обозначить просто через a и b, а $(0,1)$ — через i, то мы получим

$$(a;\ b)=a+bi.$$

т. е. теперь формальное выражение $a+bi$ стало на твердую основу — это всего-навсего точка с координатами $(a;b)$ на плоскости с заданными выше операциями сложения (1) и умножения (2).

Кроме чисто теоретической ценности, геометрическая реализация комплексных чисел имеет важное практическое значение — с ее помощью комплексные числа можно представить в так называемой тригонометрической форме, весьма удобной в многочисленных приложениях.

Упражнения

9. Изобразите точками на плоскости комплексные числа $2+i$, $1+i$, $-1-i$, $-3-2i$.

10. Докажите, что сумма z_1+z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 изображается четвертой вершиной параллелограмма, двумя смежными сторонами которого являются отрезки, соединяющие точки z_1 и z_2 с точкой O.

11. Точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника на плоскости. Найдите число, изображающее центр тяжести этого треугольника.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат xOy. Пусть точка P изображает комплексное число $z=a+bi$ (рис. 1).

Обозначим расстояние OP от точки P до начала координат через r, а через φ — угол (см. рис. 1), образуемый лучом OP с положительным направлением оси Ox и отсчитываемый против часовой стрелки $(0<\varphi<2\pi)$. (На рисунке 1 показаны углы φ для различных случаев расположения точки P.)

Из определения тригонометрических функций следует, что

$$a=r\cos\varphi,\ \ b=r\sin\varphi,$$

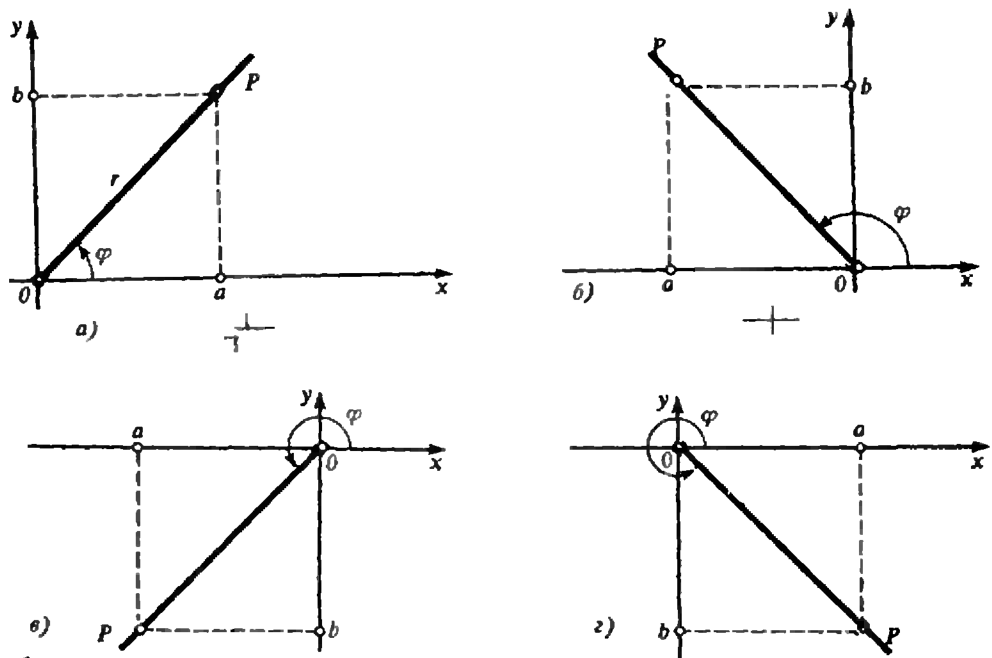


Рис. 1.

т. е.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это и есть тригонометрическая форма комплексного числа. Величина $OP = r$ называется *модулем комплексного числа* z и обозначается через $|z|$, а величина угла φ — *главным аргументом числа* z и обозначается через $\arg z$.

Так как OP является гипотенузой прямоугольного треугольника OAP, то

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{при } b \geqslant 0; \\ 2\pi - \arccos \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

Из этих формул вытекает, что $|z|$ определен однозначно и равен нулю тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Главный аргумент при $z = 0$ не определен. Для $z \neq 0$ всякий угол, отличающийся от $\arg z$ на слагаемое, кратное 2π, называется *аргументом* числа z.

Например, так как $\arg i = \frac{\pi}{2}$, то все аргументы числа i имеют вид $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Аналогично, $\arg(-1) = \pi$, а все остальные аргументы — это числа $\pi(2k+1)$.

Упражнения.

12. Найдите $|z|$ и $\arg z$, если
а) $z = -2$; б) $z = 1 + i$; в) $z = -1 - i$;
г) $z = -i$; д) $z = 1 - i\sqrt{3}$; е) $z = -3 - 4i$.

13. Запишите тригонометрическую форму чисел
а) 1; б) -1; в) $12 + 5i$; г) $12 - 5i$;
д) $-12 - 5i$; е) $\sin\alpha + i\cos\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$.

14. Докажите, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Пользуясь этим, изобразите точки на плоскости, для которых
а) $|z - i| = 1$; б) $|z - 1| = |z + 1|$;
в) $|z - i| = |iz - 1|$;
г) $1 \leqslant |z - i| \leqslant 2$.

15. Изобразите точки плоскости, для которых
а) $\arg iz = \pi/4$;
б) $\arg(iz - 1) = \pi/3$.

Все алгебраические действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, совершаются по тем же правилам, что и с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Складывать и вычитать комплексные числа проще и удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить — в тригонометрической форме.

Теорема 1. *При умножении любого конечного количества комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Доказательство. Ограничимся двумя сомножителями; общий случай без труда получается индукцией. Итак, мы должны доказать, что

$$(r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)) \cdot (r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) = (r_1 r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (3)$$

Но

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

откуда непосредственно вытекает равенство (3). Так как из $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ следует, что $r_1 r_2 \geqslant 0$, то $r_1 r_2$ — модуль, а $\varphi_1 + \varphi_2$ — аргумент произведения двух данных чисел. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что произведение комплексного числа z на комплексное число a получается из точки z так: нужно повернуть луч Oz на угол $\alpha = \arg a$ против часовой стрелки и затем взять на полученном луче точку, удаленную от O на расстояние $|a| \cdot |z|$ (рис. 2). Иначе говоря, преобразование плоскости, переводящее всякую точку z в точку az есть

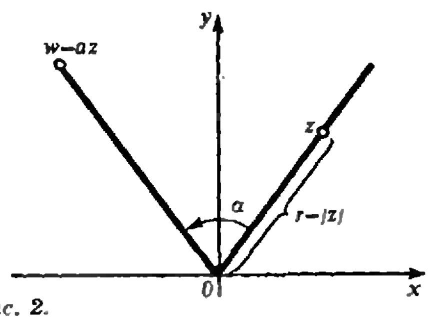


Рис. 2.

произведение поворота на угол α и гомотетии с коэффициентом $|a|$ и центром O.

Упражнение 16. Докажите следующие равенства

а) $|z|^2=z\bar{z}$; б) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$;

в) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ (выясните, при каких z_1 и z_2 будет равенство);

г) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

Каков геометрический смысл этого тождества?

Теорема 2. *При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Более подробно,

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Доказательство. Преобразуем дробь

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)},$$

умножив ее числитель и знаменатель на $\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2$. В результате получим

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}.$$

Поскольку $i^2=-1$, знаменатель второй дроби равен $\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2=1$. Числитель же можно записать так:

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2)+$$
$$+i\sin(-\varphi_2)).$$

Применив правило умножения, получим

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2),$$

что и требовалось доказать.

При совпадении сомножителей из теоремы 1 получается так называемая *формула Муавра*

$$(r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=$$
$$=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Теперь нетрудно решить вопрос об извлечении корня из комплексного числа.

Теорема 3. *Пусть z — комплексное и n — натуральное числа. В множестве комплексных чисел выражение $\sqrt[n]{z}$ при $z=0$ имеет единственное значение — 0, а при $z\neq0$ — n различных значений. Если*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

то эти значения находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$
$$k=0,\ 1,\ \dots,\ n-1.$$

Доказательство. Поскольку $0^n=0$ и из $z^n=0$ следует, что $z=0$, то $z=0$.

Пусть теперь

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq0.$$

Обозначив через ρ и α соответственно модуль и аргумент корня, будем иметь

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Отсюда по формуле Муавра

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\rho^n=r,\ n\alpha=\varphi+2k\pi,$$

откуда

$$\rho=\sqrt[n]{r},\ \alpha=\frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

т. е.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{4}$$

Сколько различных значений мы получим? Легко убедиться, что пока мы будем подставлять в последнюю формулу значения $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, все получаемые значения корня будут различны, поскольку будут различны их аргументы. При $k=n$ получим

$$\frac{\varphi+2\pi n}{n}=\frac{\varphi}{n}+2\pi,$$

и корень будет равен

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

т. е. мы получим тот же корень, что и при $k=0$. Аналогично, при $k=n+1$, $n+2$ и т. д. мы будем получать те же корни, что и при $k=1, 2, \ldots$. Таким образом, целое число k в формуле (4) изменяется в пределах от 0 до $n-1$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Корни n-й степени из единицы выражаются формулой*

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

У п р а ж н е н и я

17. Вычислите корни и изобразите их на плоскости

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{i}$;
г) $\sqrt[6]{-i}$; д) $\sqrt{3+4i}$.

18. Решите уравнения

а) $z^4=z$;
б) $(x+i)^4+(x-i)^4=0$;
в) $z^3=-z$.

19. Докажите, что все корни n-й степени из единицы являются степенями числа $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. Вычислите затем сумму k-х степеней всех корней n-й степени из единицы.

Алгебраическая замкнутость множества комплексных чисел

Мы построили совокупность комплексных чисел C как расширение множества действительных чисел, в котором разрешимо любое квадратное уравнение. На первый взгляд может показаться, что для разрешимости уравнений более высоких степеней понадобится раз за разом расширять множество C. Оказывается, что больше никаких расширений не нужно. *Если мы возьмем уравнение*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (5)$$

какой угодно степени, в котором все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть произвольные комплексные числа, то все его корни принадлежат множеству C, и значит, для решения уравнения (5) никаких новых чисел, не входящих в C, не требуется.

Это свойство называется *алгебраической замкнутостью* множества комплексных чисел. Впервые его сформулировал голландский математик Альберт Жирар еще в 1629 году, однако первое строгое доказательство было получено лишь в 1799 году Карлом Фридрихом Гауссом.

У п р а ж н е н и е 20*. Докажите, что если точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ являются вершинами выпуклого n-угольника, то все корни уравнения

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{z-z_n}=0$$

лежат внутри или на границе этого многоугольника.

Нам пишут

Здравствуй, «Квант»!
На днях, балуясь на своем микрокалькуляторе «Электронике МК-60», мне удалось составить удивительно красивую комбинацию чисел π и e:

$$e^6=\pi^5+\pi^4.$$

Надеюсь, что Вы откликнитесь на мою формулу.

Алексей Рыбак, 10 класс, член ВАКО «Союз», г. Дюртюли Башкирской АССР.

От редакции.
Сначала мы посчитали левую и правую часть равенства на микрокалькуляторе и получили 403,428775 и 403,428793. Затем посчитали тоже самое на компьютере IBM/AT и получили 403,42897 и 403,42893.

Лаборатория „Кванта"

Летающая тарелка, или Иллюстрация движения центра масс

В. МАЙЕР, В. ДИНЕРШТЕЙН

Наверное, правильнее было бы сказать: падающая тарелка. Но слово «падение» имеет какой-то негативный оттенок, а так хотелось бы, чтобы предлагаемый в этой статье опыт доставил вам только положительные эмоции.

Демонстрация. Вы берете диск, оклеенный с одной стороны черной тканью с белым кружком в центре, поднимаете его как можно выше перед собой и в вертикальном положении отпускаете. Диск падает по прямолинейной траектории в стоящий на полу ящик с поролоном или ватой (рис. 1, *а*). Вы повторяете опыт, и снова ничего необычного не происходит. Вы в третий раз поднимаете диск, отпускаете его, и... вдруг все видят, что он, падая, описывает затухающую синусоиду (рис. 1, *б*).

Такого не может быть! Ведь тело, отпущенное без начальной скорости, всегда падает вниз строго по прямой, не так ли? Нет, не так. Не тело, а его центр масс при свободном падении без начальной скорости движется по прямой. И вы, безусловно, знаете это.

О движении центра масс. Напомним, что координата центра масс (c) системы двух материальных точек с массами m_1, m_2 и координатами x_1, x_2 задается простым соотношением

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}. \qquad (*)$$

Отсюда можно найти положение центра масс любой системы. Для этой замечательной точки доказывается важная теорема о том, что центр масс движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы. Внутренние силы, т. е. силы взаимодействия между частями системы, не оказывают влияния на движение центра масс.

Если система из n частиц, массы которых m_1, m_2, ..., m_n, движется в гравитационном поле Земли, то на каждую частицу действует сила тяжести, которая по отношению к рассматриваемой системе является внешней. Поэтому сумма всех внешних сил, приложенных к центру масс системы, равна

$$\vec{F} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \ldots + m_n\vec{g} = m\vec{g},$$

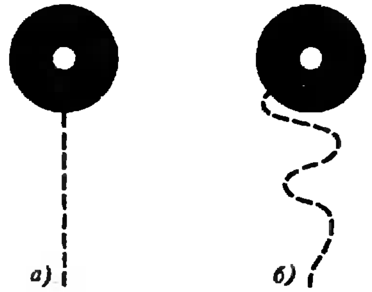


Рис. 1.

где m — масса системы и $\vec{g}$ — ускорение свободного падения. Согласно теореме о движении центра масс системы, его ускорение

$$\vec{a}_c = \vec{F}/m = \vec{g},$$

следовательно, в поле тяжести Земли центр масс системы движется с ускорением свободного падения.

Так, центр масс тела, брошенного под углом к горизонту, описывает параболу, а отпущенного с некоторой высоты,— прямую. Однако отдельные части системы (тела) могут двигаться и более сложным образом. Например, если они смещаются друг относительно друга.

Прибор для опыта. Теперь уже легко понять опыт, описанный в начале. Очевидно, видимый всем диск, совершающий колебания при падении,— это одна часть системы, а внутри обязательно должна быть другая часть, которая тоже колеблется, причем таким образом, что центр масс всей системы движется по прямой.

Действительно, повернув диск обратной стороной, мы увидим, как устроен прибор (рис. 2). Кольцо из пенопласта *1* с внешним диаметром 30 см, внутренним 25 см и толщиной 2 см сверху разрезано. В прорезь вставлены дюралевые накладки *2*, к которым прикреплена упругая полоска *3* из винипласта размером $2\times15\times150$ мм. На конце полоски закреплен стальной или латунный груз *4* размером $25\times25\times50$ мм.

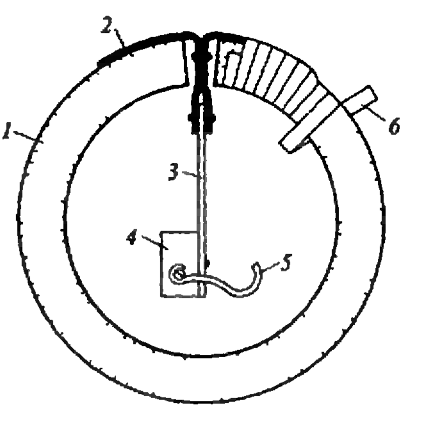


Рис. 2.

К грузу прикреплен фиксатор *5* из медной проволоки диаметром 2 мм. Пенопластовое кольцо плотно обмотано изолентой *6* — эта обмотка закрепляет на кольце дюралевые накладки и несколько повышает прочность кольца.

Сделать такой прибор вы сможете в течение получаса. Кольцо из листа пенопласта подходящей толщины вырежьте полотном от ножовки по металлу. Упругую полоску изготовьте из старой пластмассовой линейки. Груз, фиксатор и накладки закрепите на упругой полоске заклепками или болтами с гайками. А можно просто крепко связать их проволокой или изолентой.

При показе опыта груз отклоните вправо, возьмите кольцо в правую руку и большим пальцем прижмите фиксатор к кольцу. Этого никто не заметит, если передняя часть прибора оклеена непрозрачной тканью. Отпуская прибор, вы одновременно освободите и деформированную упругую полоску с грузом. При этом диск и груз будут падать, совершая колебания. Чтобы колебания сделать более заметными для зрителей, на темную ткань в центре диска липкой лентой приклейте небольшой круг из плотной белой бумаги.

Элементарная теория. Чтобы объяснить опыт, рассмотрим следующую упрощенную модель. Возьмем обруч массой M и по его горизонтальному диаметру натянем идеальную пружину жесткостью k. В центре обруча O закрепим на пружине груз массой m.

Будем считать сначала, что обруч зажат неподвижно и сила тяжести отсутствует. Поместим начало координат в точку O, а ось X направим по горизонтали вправо (рис. 3, *а*). Очевидно, центр масс системы, состоящей из обруча и груза, совпадает с началом координат O. Сместим груз из положения равновесия так, чтобы его координата стала x (рис. 3, *б*). В этом случае пружина деформируется на величину $\Delta l = x$ и возникнет упругая сила F, проекция которой на ось X равна $F_x = -kx$. (Говоря точнее, на груз действуют две силы упругости —

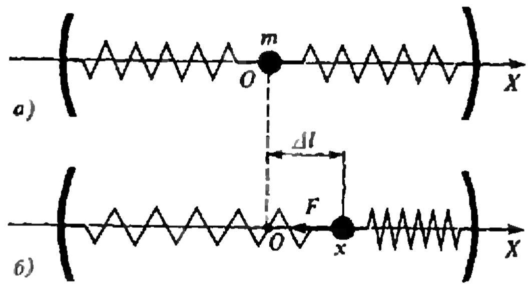


Рис. 3.

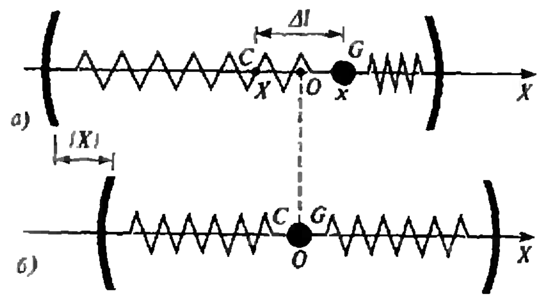


Рис. 4.

со стороны двух половин пружины, жесткость каждой из которых равна $k/2$. Так что суммарная упругая сила $F=2(k/2)x=kx$.) Согласно второму закону Ньютона, под действием этой силы груз приобретает ускорение

$$a_x=-\frac{k}{m}x.$$

Это уравнение, как известно, описывает гармоническое колебание, частота которого

$$\omega=\sqrt{k/m}$$

Понятно, что на самом деле колебания груза будут затухающими, так как трение, которым мы молчаливо пренебрегли, всегда есть. Поэтому последняя формула дает только приближенную оценку частоты колебаний.

Теперь освободим обруч и оттянем груз от положения равновесия, как показано на рисунке 4, *а*. Пусть центры масс обруча и груза находятся в точках C и G соответственно, а начало координат находится в центре масс системы — в точке O. В новой системе координат центр масс обруча имеет координату X, а груза — x.

Одновременно отпустим обруч и груз так, чтобы они стали свободно падать. Поскольку ускорение свободного падения не имеет составляющей по оси X, скорость центра масс рассматриваемой системы вдоль этой оси не изменится. А раз в начальный момент времени эта скорость была равна нулю, координата центра масс системы в течение всего времени свободного падения системы не изменится.

Что касается центров масс обруча и груза, то они станут двигаться навстречу друг другу и в некоторый момент совпадут с центром масс всей системы (рис. 4, *б*). Потом они поменяются местами и так далее, т. е. будут колебаться относительно падающего по вертикальной прямой центра масс системы.

Подставляя в формулу (*) значения $x_1=x$, $x_2=X$, $m_1=m$ и $m_2=M$ и учитывая, что $x_c=0$, получаем, что для любого момента времени справедливо равенство

$$\frac{mx+MX}{m+M}=0.$$

Отсюда следует, что координаты центров масс обруча и груза связаны соотношением

$$X=-\frac{m}{M}x.$$

При этом пружина деформирована на величину

$$\Delta l=x+|X|=x-X=(1+m/M)x,$$

на груз действует направленная к началу координат сила, проекция которой

$$F_x=-k\Delta l=-k(1+m/M)x,$$

и ускорение груза равно

$$a_x=-k\frac{m+M}{mM}x.$$

Сравнивая это выражение с выражением для ускорения груза в закрепленном обруче, приходим к выводу, что груз в свободно падающем обруче колеблется с частотой

$$\omega_1=\sqrt{k\frac{m+M}{mM}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1+\frac{m}{M}}=$$
$$=\omega\sqrt{1+\frac{m}{M}}.$$

С такой же частотой ω_1 колеблется и сам обруч, но его колебания происходят в противофазе с колебаниями груза.

Нетрудно также оценить амплитуду начальных колебаний обруча. Допустим, что внутренний радиус обруча равен R, т. е. максимальное смещение груза относительно центра обруча $\Delta l_{max}=R$. Тогда получаем, что максимальное значение амплитуды колебаний обруча есть

$$X_{max}=\frac{m}{M}x_{max}=\frac{m}{M}\;\frac{\Delta l_{max}}{1+m/M}=\frac{R}{1+M/m}.$$

Заключение. Описанный опыт будет впечатляющим в том случае, если обруч колеблется с достаточно большой амплитудой и достаточно высокой частотой. Последнее станет столь же очевидным, как и первое, если вспомнить, что свободно падающий обруч движется довольно быстро, и за малое время наблюдения надо успеть заметить хотя бы несколько колебаний. Полученные соответствующие формулы показывают, что повысить частоту и амплитуду колебаний можно только одним способом — уменьшением отношения масс обруча и груза M/m. Надеемся, что конкретные расчеты и эксперименты вы сумеете выполнить самостоятельно.

Нам пишут

Наш читатель Д. Гуринович из Москвы предлагает достаточно простое, по его мнению, физическое обоснование факта равноускоренного характера движения тела под действием постоянной силы. Вот его рассуждения.

Рассмотрим некоторое тело. Пусть вначале оно покоится. Приложите к нему постоянную силу, например с помощью динамометра. Через короткий промежуток времени Δt тело приобретет скорость Δv.

Перейдем в систему отсчета, в которой тело покоится. И здесь, в соответствии с первым законом Ньютона, за время Δt тело должно набрать ту же скорость Δv. Действительно, пружина динамометра растянута так же, как и прежде (сила постоянна), а законы во всех инерциальных системах отсчета должны быть одними и теми же.

Теперь снова вернемся в неподвижную систему отсчета. В силу закона сложения скоростей и абсолютности времени в классической механике, имеем, что за время $2\Delta t$ тело набирает скорость $2\Delta v$.

Рассуждая аналогично, заключаем, что за время $3\Delta t$ тело приобретет скорость $3\Delta v$, а за промежуток $N\Delta t$ — скорость $N\Delta v$. А это и означает, что тело движется равноускоренно.

Уважаемая редакция журнала «Квант»!

Во втором номере журнала за 1990 г. в рубрике «Игры и головоломки» был опубликован отрывок из книги М. Гарднера «Есть идея», в котором разбирались две задачи: *как с помощью одного взвешивания можно определить один из десяти флаконов с лекарством, если в нем пилюли весят на 10 мг больше, чем в остальных, и как определить все флаконы с бракованными пилюлями, если их количество неизвестно.*

При решении задачи говорится: «Предположим, что пилюли весили бы 5510 мг или на 10 мг больше, чем следует». Заметим, что без этих данных приведенное решение несостоятельно. Однако можно решить эту задачу и не зная веса доброкачественной пилюли. Вот это решение.

Положим на одну чашку весов 1 пилюлю из первого флакона, 2 — из второго, 4 — из третьего, 8 — из четвертого и т. д. 256 — из девятого, и на другую чашку весов положим 511 пилюль из десятого флакона. Если первая чашка весов окажется тяжелее на 10 n мг, то значит там лежит n бракованных пилюль. Представив число n в двоичной системе счисления, как это и делает М. Гарднер, мы получим номера бракованных флаконов. Если же тяжелее окажется вторая чашка весов на 10 n мг, то бракованными будут пилюли из десятого флакона и из тех флаконов, которые определяются ранее указанным способом, исходя из веса 5110—10 n мг.

В. Протченко

На близкую тему написал нам и И. Акулич

Задачи, подобные следующей, широко обсуждались в литературе (в том числе и на страницах «Кванта»).

Имеется 5 кучек по 5 монет. В одной из кучек (неизвестно какой) все монеты фальшивые. Известен вес настоящей монеты. А также то, что фальшивая монета на 1 г тяжелее настоящей. В нашем распоряжении есть точные аптечные весы с набором гирь, позволяющим определить любой необходимый вес. Как с помощью лишь одного взвешивания определить, в какой кучке находятся фальшивые монеты?

Решение этой задачи весьма остроумно. Надо взять из первой кучки 1 монету, из второй — 2, ..., из пятой — 5 и определить их общий вес. Известно, каков был бы этот вес, если бы все монеты были настоящими. В данном случае он будет больше на столько граммов, сколько фальшивых монет среди отобранных. Но это число как раз равно номеру соответствующей кучки.

А теперь ответьте: можно ли обойтись одним взвешиванием, если в каждой кучке имеется всего лишь 4 монеты? 3 монеты? 2 монеты?

Ответ во всех случаях одинаков: можно!

Для случая четырех монет решение почти такое же: возьмем из первой кучки 1 монету, ..., из четвертой — 4, а из пятой — ни одной. Тогда избыток общего веса отобранных монет покажет номер кучки с фальшивыми монетами: если же избытка не будет, то фальшивые монеты лежат в пятой кучке.

При меньшем числе монет в кучках те, кто решил задачу для пяти и четырех монет, вполне могут забуксовать, т.к. подсознательно будут искать решение того же типа: выбрать определенное количество монет и взвесить их. Это пользы не принесет. Но решение все-таки имеется, если использовать те возможности условия, которые не были использованы прежде, а именно: наличие аптечных весов с гирями, т. е. рычажных. Следовательно, монеты можно класть на обе чашки весов вместе с гирями, что существенно расширяет наши возможности. Укажем решение сразу для случая двух монет в каждой кучке. На левую чашку весов положим монету из первой кучки и 2 монеты из второй кучки. А на правую — 1 монету из третьей кучки и 2 монеты из четвертой кучки. С помощью гирь определим разность d (в граммах) между весом левой и правой чашки. Тогда пяти возможным значениям d соответствуют пять возможных номеров кучки с фальшивыми монетами:

d	+1	+2	−1	−2	0
номер кучки	1	2	3	4	5

МУЗЫКА, ЗВУЧАЩАЯ В КРОВИ

(фантастический рассказ)

Г. БИР

— Выглядит так, словно я перерезал себе вены, да? Не волнуйся. Все в порядке. «Генетрон» берет меня обратно. Бернард только что позвонил.— Верджил указал на отводной аппарат с интеркомом, установленный в ванной.

Я сел на крышку унитаза и сразу обратил внимание, что у шкафа с полотенцами на самом краю полки над раковиной стоит отражатель для загара с многочисленными лампочками дневного света. Однако провод был выдернут из розетки.

— Ты в самом деле этого хочешь? — спросил я, опустив плечи.

— Пожалуй, да,— сказал Верджил.— Они смогут позаботиться обо мне лучше других. Так что я решил привести себя в порядок и сегодня вечером отправляюсь. Бернард заедет за мной на своем лимузине. Класс! Отныне у меня все будет по высшему классу.

Вода розоватого оттенка выглядела странно: это совсем не походило на растворенное мыло.

— Что это у тебя в воде — пенный шампунь? — спросил я, но спустя секунду догадался сам — и мне стало вдруг нехорошо: настолько очевидными и неизбежными были эти безумные события.

— Нет,— ответил Верджил.

Это я уже знал.

— Нет,— повторил он,— это выделения через кожу. Мне не все рассказывают, но я думаю, что теперь они начали высылать разведчиков, первопроходцев. Астронавтов.

Он внимательно посмотрел на меня, и в его взгляде я не заметил даже тени озабоченности, скорее просто любопытство: как, мол, я на это отреагирую. Подтверждение моей догадки, прозвучавшее в его словах, заставило меня внутренне сжаться, словно я готовился к удару. Прежде я совсем не думал о такой возможности, видимо, потому что был занят другими аспектами проблемы.

— Это первый раз случилось? — спросил я.

— Да,— ответил он и рассмеялся.— Я все думаю, не выпустить ли этих чертенят в канализационную систему. Пусть узнают, каков на самом деле наш мир.

— Они же распространятся тогда по всему свету!

— Это точно.

— Как ты себя сейчас чувствуешь?

— Сейчас очень даже неплохо... Их тут, должно быть, миллиарды.— Еще один всплеск рукой.— Как ты думаешь? Может, стоит их выпустить?

Быстро, почти не раздумывая, я опустился на колени у ванны. Мои пальцы сами нащупали провод от лампы для загара и воткнули вилку в розетку. Верджил как был мальчишкой, когда подводил ток к дверным ручкам, варил пунш, окрашивающий мочу в голубой цвет, и разыгрывал тысячи других дурацких шуток, так им и остался. Он не вырос, не созрел до понимания, что его гениальности вполне достаточно, чтобы действительно изменить мир, но при этом нужно обладать еще и огромным чувством ответственности.

Верджил протянул руку к пробке, затыкающей слив.

— Знаешь, Эдвард, я...

Он так и не договорил. Я схватил лампу, бросил ее в ванну и тут же отпрыгнул назад, потому что вода буквально взорвалась облаком пара и искр. Верджил закричал, судорожно дернулся — затем все замерло. Лишь продолжала шкворчать лампа, да от его волос поднималась тонкая струйка дыма.

Я поднял крышку унитаза, и меня тут же стошнило. Потом я зажал нос и прошел в гостиную. Ноги вдруг отказались держать меня — и я рухнул на диван.

Примерно через час, порывшись на кухне, я нашел коробку отбеливателя, нашатырь и бутылку виски. Вернулся в ванную и, старательно отворачивая взгляд от Верджила, налил в ванну сначала виски, потом нашатырный спирт, потом высыпал отбеливатель. Хлорка тут же забурлила в воде, и я вышел, плотно притворив за собой дверь.

Когда я вернулся домой, в квартире

Окончание. См. «Квант» № 5 и № 6.

звонил телефон, но я не стал снимать трубку. Вдруг это из больницы? Или Бернард? А может, полиция. Легко представлялось, как я буду с ними объясняться. «Генетрон» напрочь откажется подтвердить мой рассказ. Бернард вообще заявит, что ничего не знает.

Я ощущал невероятную усталость во всем теле, мускулы сжимались в тугой узел от напряжения и... Даже не знаю, как можно назвать такое чувство. Чувство, возникающее после...

Осуществления геноцида?

Совершенно дикая мысль. Я не мог поверить, что своими руками убил сотни триллионов разумных существ. Уничтожил целую галактику... Смехотворное обвинение. Но мне было совсем не смешно.

Гораздо легче верилось в то, что я убил человека, своего друга. Дым, оплавленный каркас лампы, растекшаяся лужицей пластика розетка, обгоревший провод...

Верджил!

Я бросил ему в ванну включенную лампу для загара. Меня по-прежнему мутило. Сны, города, насилующие Гэйл (что, интересно, с его прежней подружкой, Кандис?). Вода, утекающая в трубу. Галактики, рассеянные вокруг нас. Бесконечный ужас... Но одновременно — огромный потенциал красоты. Новая форма жизни, симбиоз, трансформация.

Убил ли я их всех? На мгновение меня охватила паника. Завтра, подумалось мне, я схожу туда и простерилизую квартиру. Что-нибудь придумаю. О Бернарде я даже не вспомнил.

Когда вернулась домой Гэйл, я спал на диване. Поднялся я, чувствуя себя очень скверно, и она тут же это заметила.

— Ты не заболел? — спросила Гэйл встревоженно, присаживаясь на край.

Я покачал головой.

Гэйл положила руку мне на лоб.

— Эдвард, у тебя температура. Очень высокая.

Я дотащился до ванной и взглянул на себя в зеркало. Гэйл остановилась позади меня.

— Что это? — спросила она.

Под воротничком рубашки вся шея у меня была исчерчена белыми линиями. Как на шоссе. Видимо, они проникли в мой организм уже давно, несколько дней назад.

— Влажные ладони...— проговорил я.

Удивительно, что это не пришло мне в голову раньше.

Очевидно, мы чуть не умерли. Сначала я еще пытался бороться, но буквально через несколько минут ослабел настолько, что уже не мог пошевелиться. Гэйл оказалась в таком же состоянии спустя час.

Я лежал на ковре в гостиной весь мокрый от пота. Гэйл — на диване. Лицо ее стало белым, словно тальк, глаза закрылись — как труп в лаборатории бальзамировщика. Некоторое время мне казалось, что она действительно умерла. И даже в том беспомощном, болезненном состоянии меня не оставляла злость на себя и чувство вины за свою слабость, за неспособность вовремя подумать о всех возможных последствиях. Но вскоре и на это не осталось сил. Я не мог даже моргнуть; поэтому закрыл глаза и просто ждал.

В руках, в ногах явственно ощущался ритм какой-то деятельности. С каждым толчком крови внутри меня возникал некий звук, похожий на звучание оркестра в тысячу музыкантов, играющих вразнобой целые фрагменты нескольких симфоний. Музыка, звучащая в крови... Постепенно звук становился резче, но одновременно и слаженнее: нагромождение акустических волн стихало, разделяясь на отдельные гармонические сигналы.

Эти сигналы словно врастали в меня, в ритм моего собственного сердца.

Сначала они подчинили себе наши иммунные реакции. Война — а это действительно была война, какой на Земле никто никогда не знал, война с триллионами, участвующими в сражениях,— продолжалась около двух дней.

К тому времени, когда я нашел в себе силы, чтобы добраться до кухонного крана, они уже принялись за мой мозг, пытаясь расколоть коды и найти бога, скрывающегося в протоплазме. Я пил и пил, пока меня не замутило, затем попил еще, уже медленными глотками, и отнес стакан воды Гэйл. Она прижала его к потрескавшимся губам и принялась жадно пить. Глаза ее покраснели, вокруг присохли желтоватые грязные крошки. Но теперь коже вернулось некое подобие нормального оттенка. Через несколько минут мы уже сидели за кухонным столом и вяло пережевывали пищу.

— Что это за чертовщина с нами приключилась? — спросила она первым делом.

У меня не было сил объяснять, и я лишь покачал головой. Затем почистил апельсин и поделил его на двоих.

— Надо вызвать врача,— сказала она.

Но я знал, что мы этого не сделаем. Я уже начал получать от них сообщения, из которых становилось понятно, что возникшее у нас ощущение свободы иллюзорно.

Сначала эти сообщения были предельно

просты. В мыслях вдруг возникали даже не команды, а скорее воспоминания о командах. Нам запрещалось покидать квартиру: видимо, те, кто нами распоряжался, поняли нежелательность таких действий, хотя сама концепция наверняка казалась им совершенно абстрактной. Нам запрещалось вступать в контакт с другими себе подобными. По крайней мере какое-то время нам будут разрешать принимать пищу и пить воду из-под крана.

Когда спала температура, процесс трансформации пошел быстро и решительно. Почти одновременно нас с Гэйл заставили замереть. Она в тот момент сидела за столом, а я опустился на колени и едва видел ее краешком глаза.

На руке у Гэйл уже начали образовываться гребни.

Они многому научились, пока жили внутри Верджила, и теперь применяли совсем иную тактику. Часа два все мое тело невыносимо чесалось и зудело — два часа в аду, но потом они наконец прорвались к мозгу и нашли меня. Многовековые по их шкале времени попытки увенчались успехом, и теперь они получили возможность общаться с неповоротливым, медлительным разумом, который когда-то владел их вселенной.

Они отнюдь не были жестоки. Когда концепция вызванного их действиями неудобства и его нежелательности стала понятна этим маленьким существам, они сразу принялись за работу, чтобы устранить неприятные ощущения. И пожалуй, перестарались. Еще час я пребывал в состоянии абсолютного блаженства, лишив их всякой возможности контакта.

На следующее утро нам снова разрешили двигаться. Главным образом для отправления физиологических нужд: от кое-каких продуктов жизнедеятельности они не могли избавиться сами. Я послушался — моча оказалась фиолетовой, и Гэйл последовала моему примеру. Мы долго смотрели друг на друга пустыми глазами, потом она выдавила из себя улыбку.

— Они с тобой тоже разговаривают? — спросила Гэйл.

Я кивнул.

— Значит, я не сошла с ума.

В последующие двенадцать часов контроль ослаб, и мне удалось набросать значительную часть этой рукописи. Подозреваю, что в это время в моем организме шла еще одна война. Гэйл могла немного шевелиться, но не более того.

Когда они снова вернули себе всю полноту власти, нам было приказано обняться, и мы без колебаний подчинились.

— Эдди...— прошептала Гайл, и мое имя стало последним звуком, который донесся до меня снаружи.

В таком положении, стоя, мы и срослись. Через несколько часов наши ноги превратились в массивную опору, которая растеклась по полу во все стороны сразу. Отдельные отростки поползли к окну, к солнечному свету, и на кухню — к источнику питьевой воды. Вскоре филаменты добрались до всех концов комнаты, содрали краску и штукатурку со стен, затем обивку и наполнитель с мягкой мебели.

К следующему утру трансформация завершилась.

Я теперь не очень хорошо вижу, и мне трудно судить, на что мы похожи. Видимо, на две огромные плоские клетки, распустившие во все стороны отростки филаментов и растекшиеся по квартире. Великое имитирует малое.

Мне было приказано продолжать записывать свои впечатления, но скоро это будет невозможно. День ото дня, по мере того как нас поглощают находящиеся внутри мыслители, оба наших разума теряют устойчивость. С каждым днем наши личностные характеристики утрачиваются. Мы действительно огромные, неуклюжие динозавры. Теперь наши воспоминания хранятся в миллиардах маленьких существ, наши личности рассредоточены по объему преобразованной крови.

Скоро необходимость в централизации отпадет совсем.

Мне сообщили, что водопровод и канализация находятся в их власти. Многие люди на других этажах здания уже подверглись трансформации.

Через несколько недель по старой временной шкале мы доберемся до озер, рек и морей уже огромным числом.

Я даже не могу догадаться, каковы будут последствия. Каждый квадратный дюйм поверхности планеты забурлит разумом. А годы спустя — может быть, раньше — все люди сольются, отбросив личное.

Появятся новые существа, и их будущие мыслительные способности просто невозможно себе представить.

Ненависть и страх теперь полностью оставили меня. Меня — нас — волнует сейчас только один вопрос.

Сколько раз подобное случалось где-то еще? Землю никогда не посещали пришельцы из космоса. Да и зачем им это? Ведь в каждой крупинке песка можно найти вселенную.

Перевод с английского А. Корженевского

Математические сюрпризы

Один старый факт и несколько новых

(Еще одно путешествие в мир фигурных чисел и числовых фигур: загадочные числа, которые могут вас околдовать)

Дж. КОНВЕЙ

Сложите первые n нечетных чисел, начиная с 1. Что получилось?

$$1=1,$$
$$1+3=4,$$
$$1+3+5=9,$$
$$1+3+5+7=16,$$
$$1+3+5+7+9=25.$$

В третьем номере журнала мы начали публикацию переводов статей из советско-американского журнала «Квантум». Сегодня мы предлагаем вашему вниманию следующую статью из этой серии.

Узнаете эти числа? Конечно! Это «квадратные» числа (из дальнейшего вы поймете, почему так называют квадраты целых чисел):

$$1=1\cdot 1,\ 4=2\cdot 2,\ 9=3\cdot 3,\ 16=4\cdot 4,\ 25=5\cdot 5,\dots$$

И в этом заключается наш старый факт. Можем ли мы его объяснить? Обобщить? Можно ли аналогичным образом получить «кубические» числа

$$1=1\cdot 1\cdot 1,\ 8=2\cdot 2\cdot 2,\ 27=3\cdot 3\cdot 3,\ 64=4\cdot 4\cdot 4,\dots?$$

Ну что ж, имеется множество разных объяснений, и они ведут к множеству разных новых фактов. Попробуем сначала посмотреть

С точки зрения алгебры

Мы должны доказать, что разности между последовательными квадратами 0, 1, 4, 9, 16, 25,...— это в точности нечетные числа 1, 3, 5, 7, 9, 11,... Но это просто: очевидная алгебраическая выкладка показывает, что такая разность в общем виде равна

$$(n+1)^2-n^2=(n^2+2n+1)-n^2=2n+1,$$

Точно так же вы можете убедиться, что разности между последовательными значениями любого многочлена — это значения некоторого многочлена на единицу меньшей степени. Например, соседние кубы отличаются на числа вида $3n^2+3n+1$, т. е. на загадочные числа

$$1,\ 7,\ 19,\ 37,\ 61,\dots$$

Кубы — это суммы нескольких первых чисел этой последовательности:

$$1=1,\quad 1+7=8,\quad 1+7+19=27,\dots$$

Тоска!.. С какой стати кто-то должен интересоваться этими загадочными числами?

Попробуем еще раз.

С точки зрения арифметики

Сумма нескольких чисел равна произведению их количества на их среднее арифметическое. Так, например, сумма $1+3+5+7+9$ есть 5×5. Средние арифметические сумм

$$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ldots$$

— это полусуммы первого и последнего слагаемых, и ясно, что они равны

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$$

Вот это-то и подводит нас к красивому способу получения кубов. Вместо того, чтобы все время брать суммы первых n нечетных чисел, будем брать следующие n чисел, начиная с того места, где мы остановились.

Тогда вместо равенств

$$\begin{aligned} 1&=1^2,\\ 1+3&=2^2,\\ 1+3+5&=3^2,\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

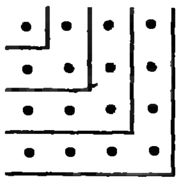
мы будем иметь

$$\begin{aligned} 1&=1^3,\\ 3+5&=2^3,\\ 7+9+11&=3^3,\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

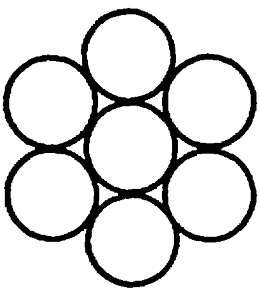
Это уже получше, но попробуем еще одну идею.

С точки зрения геометрии

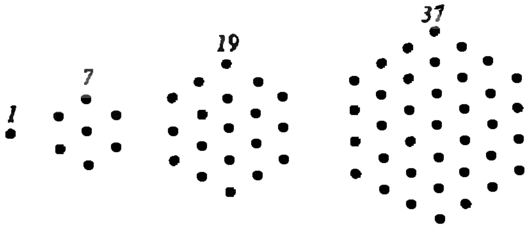
Взгляните на этот узор:



Он очень ясно показывает, как квадратное число разбивается на последовательные нечетные числа. Можно ли взглянуть на наши загадочные числа 1, 7, 9, 37, 61 как на узоры из точек? Семь монеток, естественно укладывающихся в аккуратную фигуру

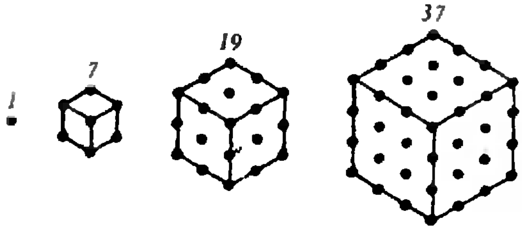


могут нам подсказать... Ну конечно! Наши загадочные числа



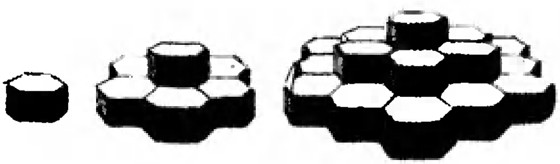
известны в комбинаторике как «гекс-числа» («шестерные» по-гречески; не путайте с термином «гексагональные» — шестиугольные числа, означающим нечто иное).

Верно ли, что сумма нескольких первых гекс-чисел действительно является кубическим числом? Верно! И чтобы увидеть это, достаточно просто провести несколько линий — и



узоры из точек превратятся в кубические ячейки, которые можно вложить друг в друга, составив куб, заполненный точками.

У моей дочки были шестиугольные «кубики» вроде показанных на рисунке, из которых она складывала шестиугольные пирамиды. Сколько кубиков нужно было ей для пирамиды с n этажами?



Похоже, что различных обобщений нашего основного факта действительно много, и это прекрасно, ибо это значит, что всегда есть надежда найти что-то новое. Одно из наиболее поразительных было обнаружено лишь недавно.

Чудеса Месснера

Начнем с квадратов. Запишем несколько первых натуральных чисел, обведем кружком каждое второе и сложим остальные:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
1 4 9 16 25 ...

Разумеется, получатся квадраты.

Теперь изменим процедуру — обведем каждое третье число в верхнем ряду, образуем следующий ряд, как прежде, обведем в нем каждое второе число и сложим необведенные числа. Суммы составят третий ряд:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
1 3 7 12 19 27 ...
1 8 27 . . .

Сюрприз! Возникли кубы! Можете ли вы доказать, что так и будет продолжаться?

Похоже, что это проходит и со всеми другими степенями. Скажем, если обводить каждое пятое число в первом ряду, каждое четвертое — во втором и т. д., мы по крайней мере три первые пятые степени получим правильно.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...
1 3 6 10 16 23 31 40 51 ...
1 4 10 26 49 80 131 ...
1 5 31 80 211 ...
1 32 243 ...

Можете ли вы проверить, что и эта закономерность будет выполняться всегда?

Вообще, можно обводить любой набор чисел в верхнем ряду, разбивая остальные числа на серии. В последующих рядах обводится последнее число каждой серии, образуя из сумм необведенных чисел новый ряд, и т. д.

Мы видели, что если в верхнем ряду обводить числа

$$1+1,\ 2+2,\ 3+3,\ 4+4,\ \ldots,$$

то возникают квадраты, т. е. числа

$$1\cdot1,\ 2\cdot2,\ 3\cdot3,\ 4\cdot4,\ldots$$

А обводя числа

$$1+1+1,\ 2+2+2,\ 3+3+3,\ \ldots,$$

мы получаем кубы

$$1\cdot1\cdot1,\ 2\cdot2\cdot2,\ 3\cdot3\cdot3,\ \ldots$$

Что произойдет, если обводить «треугольные» числа

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ 1+2+3+4+5,\ldots?$$

Ответы

Конечно, для 6-этажной пирамиды моей дочке потребовалось n^3 кубиков.

Да, при продолжении верхней строки мы получим все последовательные кубы в нижней (третьей) строке. Это совсем нетрудно доказать, записав последовательности чисел в общем виде:

... $3n-1$ $3n$ $3n+1$ $3n+2$ $3n+3$
$3n^2$ $3n^2+3n+1$ $3(n+1)^2$
n^3 $(n+1)^3$

Несколько сложнее доказать, что и правило для k-й степени работает при всех k. Мы опубликуем лучшее из присланных доказательств.

Треугольные числа

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ 1+2+3+4+5$$

волшебное преобразование Месснера превращает (конечно!) в факториалы:

$$1,\ 1\cdot2,\ 1\cdot2\cdot3,\ 1\cdot2\cdot3\cdot4,$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5,\ \ldots$$

Публикацию подготовил
В. Дубровский

Ф-значит ракета

Итоги конкурса «KQ-91»

Осенью прошлого года журнал «Квант» стал инициатором проведения советско-американского конкурса юных любителей астрономии и космонавтики. Соучредителями конкурса стали Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество (ВАКО) «Союз», журнал «Quantum» (СССР — США) и организация International Educational Network (США). Позднее к ним присоединилась газета «Пионерская правда».

Конкурс прошел в три тура, первые два из которых были заочными, а последний — очным. К сожалению, учредители не учли сегодняшний уровень работы подразделений связи: не только журнал поступал к читателям с 2—3-месячным опозданием, но и некоторые письма (даже из европейской части СССР), отправленные в срок, приходили в редакцию спустя два месяца после подведения итогов. Из-за этого многие ребята, правильно решившие задачи второго тура, не смогли принять участия в третьем, который проходил в апреле в Москве.

Сегодня мы публикуем список участников конкурса, показавших лучшие результаты во втором и третьем турах. Бо́льшая часть участников, указанных в списке, награждена путевками в международные космические школы, которые проводятся в июле под Туапсе и Нью-Йорком. Остальных редакция премирует подпиской на журнал «Квант» на 1992 год. В одном из ближайших номеров мы расскажем о решениях задач конкурса и о космических школах.

А. Акиншин (Новороссийск), А. Бакулев (Ленинград), Е. Бобонец (п. Зеленодольск Днепропетровской обл.), А. Бородин (Донецк), С. Борщев (Алма-Ата), А. Бочаров (Воронеж), С. Быстров (Кимры), А. Ведищев (Верхняя Солда), А. Войченко (Киев), Д. Волошко (Красноярск), С. Вурдов (Красноярск), В. Глазков (Коломна), Е. Ежкова (Балашиха), Р. Ениколопов (Москва), Д. Жалковский (Донецк), А. Ильин (Магнитогорск), Р. Капустий (Рава-Русская), И. Коробов (Москва), Л. Коф (Барнаул), И. Кувшинцева (п. Чудово Новгородской обл.), С. Любко (Киев), Е. Медведик (Пенза), М. Митина (Ленинград), К. Петухов (Старый Оскол), Г. Пушкарева (Москва), Т. Рашба (Махачкала), А. Савин (Карачев), П. Салтыков (Конотоп), А. Сипачев (Москва), А. Соболь (Москва), И. Сперанский (Донецк), И. Тараскин (Ужгород), А. Таланкина (Верхний Тагил), В. Федотов (Москва), В. Фомин (Таллинн), А. Шабашев (Самара), Е. Шевелева (Витебск), Н. Шпер (Москва), О. Шпырко (Киев), Т. Шутенко (Мариуполь), А. Щербаков (Казань), Р. Якупов (Кузнецовск).

И напоследок — о наших планах. Редакция намерена продолжить серию конкурсов и международных школ (ранее мы уже проводили советско-американские физико-математические школы). С каким уклоном они будут — космическим, физико-математическим или компьютерным — покажет жизнь. А может, все дисциплины будут представлены вместе. В любом случае, мы советуем нашим читателям наряду с изучением точных наук уделять внимание и иностранным языкам. Тем более, что в жизни это наверняка пригодится.

Итак, до следующего конкурса!

«Космическая» стипендия

В марте нынешнего года Президиумом Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества «Союз» принято постановление об учреждении стипендий ВАКО «Союз» для одаренных учащихся общеобразовательных и специализированных школ, ПТУ и лицеев.

Стипендия ВАКО «Союз» учреждена в целях морального и материального стимулирования учебного и творческого труда учащихся.

Стипендия (размером в 70 рублей) назначается решением Президиума ВАКО «Союз» по представлению региональных отделений или первичных организаций ВАКО либо других работающих с одаренной молодежью организаций.

На стипендию представляются кандидатуры учащихся, имеющих оценки «хорошо» и «отлично», активно участвующих в творческой технической деятельности в кружках, клубах или любых других аналогичных учреждениях, занимающихся пропагандой космической техники и исследований космоса среди подростков.

Стипендия устанавливается ВАКО на год, с первого апреля каждого года. Всего 100 стипендий.

Стипендиаты получают специальные дипломы и письма-рекомендации от ВАКО «Союз» для поступления в технические вузы.

Игры и головоломки

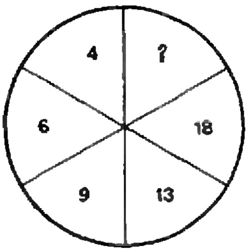
Числовой тест

По многочисленным просьбам читателей публикуем числовой тест. Мы взяли его из книги английского психолога Г. Айзенка «Проверьте свои способности» (М.; Мир, 1972). Один из его тестов мы приводили в нашем журнале в девятом номере за 1989 год. Числовой тест позволяет вычислить ваш «коэффициент интеллектуальности» по следующему правилу: если верно выполнены 7 заданий, КИ= =90, дальше за каждые 4 задания вы получаете еще по 10 очков. На решение теста дается 30 минут.
Не пугайтесь, если вы решили правильно лишь меньшую часть заданий: 100 очков — нормальный результат, 125— хороший, а уж больше 130 — замечательно!
Желаем удачи!

1. Продолжите числовой ряд.

18 20 24 32 ?

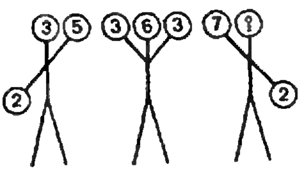
2. Вставьте недостающее число.



3. Продолжите числовой ряд.

212 179 146 113 ?

4. Вставьте недостающее число.



5. Продолжите числовой ряд.

6 8 10 11 14 14 ?

6. Вставьте пропущенное число.

17 (112) 39
28 ( ) 49

7. Вставьте недостающее число.

3 9 3
5 7 1
7 1 ?

8. Продолжите ряд чисел.

7 13 24 45 ?

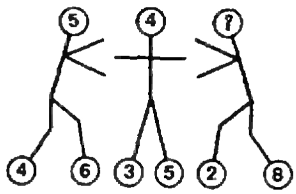
9. Вставьте пропущенное число.

234 (333) 567
345 ( ) 678

10. Вставьте пропущенное число.

4 5 7 11 19 ?

11. Вставьте недостающее число.



12. Продолжите числовой ряд.

6 7 9 13 21 ?

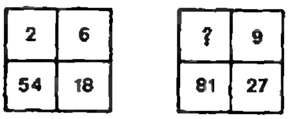
13. Вставьте недостающее число.

4 8 6
6 2 4
8 6 ?

14. Продолжите числовой ряд.

64 48 40 36 34

15. Вставьте недостающее число.



16. Вставьте пропущенное число.

718 (26) 582
474 ( ) 226

17. Продолжите числовой ряд.

15 13 12 11 9 9 ?

18. Вставьте недостающее число.

9 4 1
6 6 2
1 9 ?

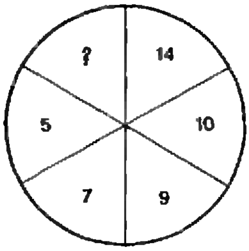
19. Вставьте пропущенное число.

11 12 14 ? 26 42

20. Вставьте недостающее число.

8 5 2
4 2 0
9 6 ?

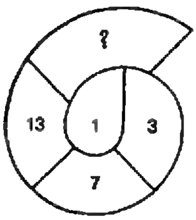
21. Вставьте пропущенное число.



22. Вставьте пропущенное число.

341 (250) 466
282 ( ) 398

23. Вставьте пропущенное число.



24. Вставьте пропущенное число.

12 (336) 14
15 ( ) 16

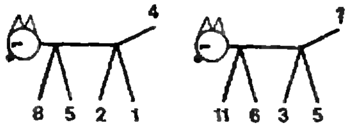
25. Вставьте недостающее число.

4 7 6
8 4 8
6 5 ?

26. Продолжите числовой ряд.

7 14 10 12 14 9 ?

27. Вставьте недостающее число.



28. Вставьте пропущенное число.

17 (102) 12
14 ( ) 11

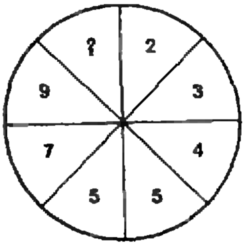
29. Продолжите числовой ряд.

172 84 40 18 ?

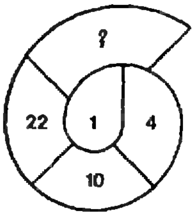
30. Продолжите числовой ряд.

1 5 13 29 ?

31. Вставьте недостающее число.



32. Вставьте недостающее число.



33. Продолжите числовой ряд.

0 3 8 15 ?

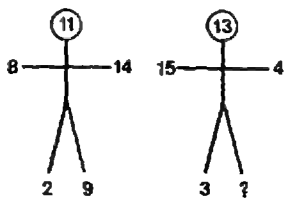
34. Вставьте пропущенное число.

1 3 2 ? 3 7

35. Вставьте пропущенное число.

447 (366) 264
262 ( ) 521

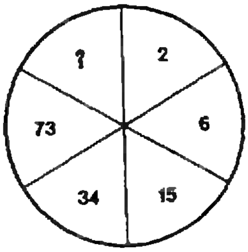
36. Вставьте недостающее число.



37. Продолжите числовой ряд.

4 7 9 11 14 15 19 ?

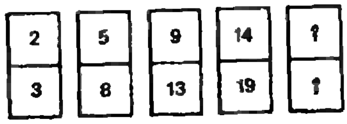
38. Вставьте недостающее число.



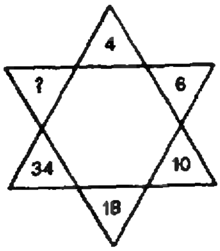
39. Вставьте недостающее число.

3 7 16
6 13 28
9 19 ?

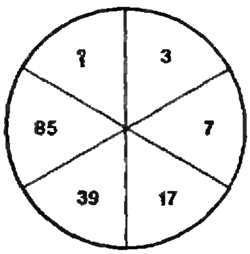
40. Вставьте недостающие числа.



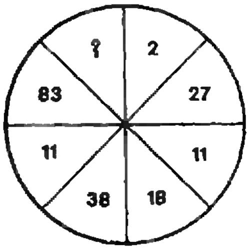
41. Вставьте пропущенное число.



42. Вставьте пропущенное число.



43. Вставьте недостающее число.



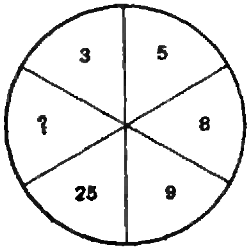
44. Вставьте пропущенное число.

643 (111) 421
269 ( ) 491

45. Продолжите числовой ряд.

857 969 745 1193 ?

46. Вставьте недостающее число.



47. Вставьте недостающие числа.

9 (45) 81
8 (36) 64
10 ( ) ?

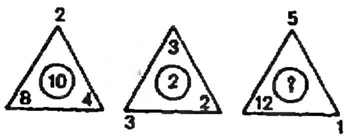
48. Продолжите числовой ряд.

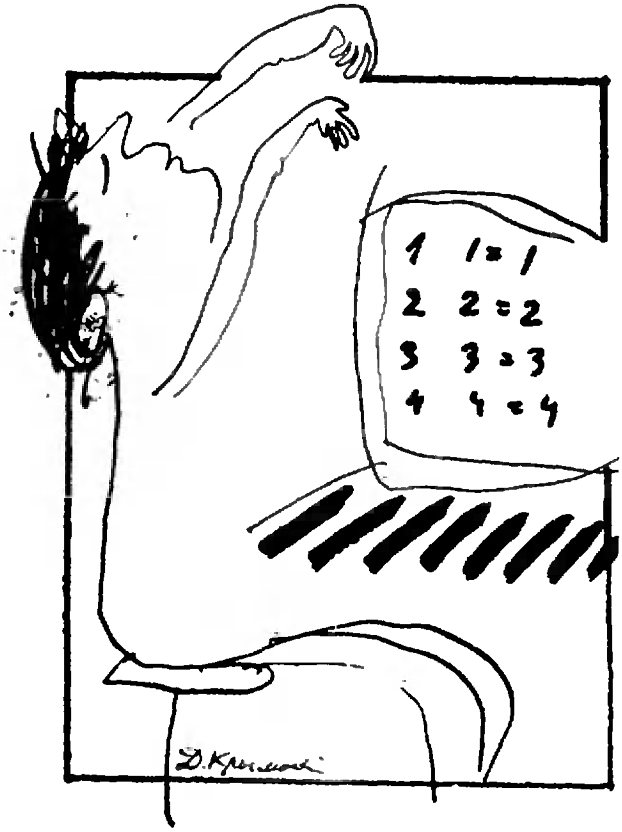
7 19 37 61 ?

49. Продолжите числовой ряд.

5 41 149 329 ?

50. Вставьте пропущенное число.





Информатика и программирование

Алгоритмика простоты

Числовые «атомы»

Б. ТАРАСЕНКО

Нелегкий вопрос-то,
Но верь одному:
Все сложно и просто,
Считай, по уму!

Простые числа можно назвать «атомами числовой Вселенной». Поэтому коль скоро кто-то начал «коллекционировать простые», столь же быстро он подходит к проблеме разложения натуральных чисел на простые. При наличии программы № 1 из предыдущего номера «Кванта» задача разрешается незамедлительно.

Если исследуемое число — четное, то сначала надо выделить из него максимальную степень двойки путем последовательного деления на два. Это легко сделать на калькуляторе любого типа. Теперь задача свелась к разложению на множители нечетного числа. Необходимый нам инструмент получится, если в программе-прототипе заменить команды 24—27 безусловным переходом на начало программы, а на шаге 16 заменить адресную часть команды условного перехода с 24 на 23.

Работая с полученной программой, при считывании очередного сомножителя каждый раз придется вручную выполнять три дополнительные клавишные команды. Это, безусловно, неудобно. Положительной стороной «медали» является почти предельная кратность основного текста новой программы, а также легкость ее получения из прототипа. У нас еще будут программные анализаторы простоты с улучшенным сервисом, но более объемные. Ничто даром не дается, в том числе и дополнительные удобства в работе.

Программа № 2, как и предыдущая, публикуется в таком виде, в каком ее, с нашей точки зрения, можно давать любому подготовленному пользователю без дополнительных пояснений.

Программа 2. Анализатор делителей нечетных чисел

Пригодны все ПМК от Б3-34 до МК-61. Переменные и используемые регистры: Д=Рг5 — текущий нечетный делитель; И=Рг6 — стартовое или очередное нечетное испытуемое число; ЧАСТН=Рг9=И/Д — частное от деления И на Д (сначала действительное число, а затем его целая часть).

Описание алгоритма

Задать начальное И. Для последовательных нечетных Д, начиная с Д=3 и пока ЧАСТН>Д, вычислять ЧАСТН=И/Д, затем К — целую часть И/Д и остаток ОСТ=И—К×Д. В случае ОСТ=0 считать Д (это очередной простой делитель исследуемого числа), задать новИ=И/Д и перейти к исследованию этого И.

Текст программы с пошаговыми комментариями

00		Х→П	6	46	/+	Занесение в Рг6 стартового И из РгХ
01		1		01	/+	Константа 1
02		Х→П	5	45	/+	Занесение 1 в Рг5, подготовка счетчика Д
03	К	П→Х	5	Г5	/+	Д:=Д+1, начальная фаза работы счетчика Д
04	К	П→Х	5	Г5	/+	Д:=Д+1; результат: новД=старД+2
05		П→Х	6	66	/+	Вызов И из Рг6 в РгХ
06		П→Х	5	65	/+	Вызов Д в РгХ; И перемещается в РгY
07		÷		13	/+	ЧАСТН = И/Д
08		Х→П	9	49	/+	Засылка ЧАСТН в Рг9
09	К	П→Х	9	Г9	/+	К = целая часть от ЧАСТН
10		П→Х	6	66	/+	Вызов И в РгХ
11		П→Х	9	69	/+	Вызов К в РгХ; И перемещается в РгY
12		П→Х	5	65	/+	Вызов Д в РгХ; РгY = К; РгZ = И
13		×		12	/+	Д × К
14		—		11	/+	ОСТ = И 8 К × Д, остаток от деления
15	F	Х≠0		57	/+	ОСТ ≠ 0?
16		23		23	/+	НЕТ (т. е. ОСТ = 0), переход на шаг 23
17		П→Х	9	69	/+	ДА (т. е. ОСТ ≠ 0), вызов целого ЧАСТН
18		П→Х	5	65	/+	Вызов Д из Рг5 в РгХ
19		—		11	/+	РгХ = ЧАСТ — Д
20	F	Х<0		5С	/+	ЧАСТН — Д < 0?
21		03		03	/+	НЕТ, переход на шаг 03 к новому значению Д
22		П→Х	6	66	/+	ДА (множество Д исчерпано), вызов И
23		С/П		50	/+	Стоп-индикация И или ОСТ (если ОСТ = 0)
24		БП		51	/+	Безусловный переход
25		00		01	/+	на шаг 00

Если ОСТ≠0 для всех проверяемых Д, то само испытуемое число — простое, разложение закончено.

Оценка быстродействия программы: у числа 11111 делитель 47 обнаружен за 2 минуты, у числа 10001 делитель 73 — за 3 минуты 20 секунд.

Инструкция

После набора программы и переключения ПМК в режим счета нажать клавишу В/О. Затем набрать начальное нечетное целое И и нажать клавишу С/П, начнется счет; после останова счета если ПМК остановился при ненулевом числе на индикаторе, то последнее испытуемое число — простое, разложение закончено; если на индикаторе 0 (обнаружен простой делитель), то выполнить вручную

П→Х 6

П→Х 5

и считать число с индикатора (это очередной простой делитель исследуемого числа), затем нажать клавишу ÷ и если на индикаторе 3, то это — последний простой делитель; если на индикаторе не 3, то нажать клавишу С/П, после чего поиск простых делителей возобновится.

Новый инструмент обычно испытывают на достойном материале. Мы взяли степени двойки плюс и минус единица, числа Фибоначчи, репьюниты (числа, составленные только из единиц, см. «Квант» № 8 за 1989 год), а также числа, составленные из двух единиц и нескольких разделяющих их нулей. «Протоколы испытаний» приводятся ниже. Мы не будем их комментировать. Уверены, что читатели разберутся во всем сами.

2^n+1

n	разложение
1	3=3
2	5=5
3	9=3 × 3
4	17=17
5	33=3 × 11
6	65=5 × 13
7	129=3 × 43
8	257=257
9	513=3 × 3 × 3 × 19
10	1025=5 × 5 × 41
11	2049=3 × 683
12	4097=17× 241

2^n-1

n	разложение
1	$1=1$
2	$3=3$
3	$7=7$
4	$15=3\times5$
5	$31=31$
6	$63=3\times3\times7$
7	$127=127$
8	$255=3\times5\times17$
9	$511=7\times73$
10	$1023=3\times11\times31$
11	$2047=23\times89$
12	$4095=3\times3\times5\times7\times13$

Числа Фибоначчи

n	разложение
1	$1=1$
2	$1=1$
3	$2=2$
4	$3=3$
5	$5=5$
6	$8=2\times2\times2$
7	$13=13$
8	$21=3\times7$
9	$34=2\times17$
10	$55=5\times11$
11	$89=89$
12	$144=2\times2\times2\times2\times3\times3$

$(10^n-1):9$

n	разложение
1	$1=1$
2	$11=11$
3	$111=3\times37$
4	$1111=11\times101$
5	$11111=41\times271$
6	$3\times7\times11\times13\times37$
7	239×4649
8	$11\times73\times101\times137$
9	$3\times3\times37\times333667$
10	$11\times41\times271\times9091$
11	21649×513239
12	$3\times7\times11\times13\times37\times$ $\times101\times9901$

$10^{n-1}+1 (n>1)$

n	разложение
	$1=1$
2	$11=11$
3	$101=101$
4	$1001=7\times11\times13$
5	73×137
6	11×9091
7	101×9901
8	11×909091
9	17×5882353
10	$7\times11\times13\times19\times52579$
11	$101\times3541\times27961$
12	$11\times11\times23\times4093\times8779$

Внутри каждой последовательности между порядковыми номерами и разложением чисел на простые сомножители просматриваются четкие связи, исследование которых мы предоставляем читателям и до следующего выпуска нашей серии снова оставляем всех любителей математики наедине с ручным персональным компьютером-калькулятором и этой программой.

„Квант" улыбается

Пространство

Однажды Вернер Гейзенберг сделал весьма характерное замечание. Както во время прогулки речь зашла о пространстве. Я только что прочитал книгу Вейля «Пространство, время, материя» и под ее влиянием гордо заявил, что пространство — это просто поле линейных операций.

— Чушь,— ответил Гейзенберг,— пространство голубое и по нему летают птицы.

Феликс Блох

(Physics Today, 1976, 29 (12) 27)

* * *

О Филиппе Франке рассказывают такую историю. Однажды на первой лекции по философии науки он обратился к присутствующим со следующими словами: «Первый вопрос, который мы рассмотрим, касается пространства и времени. В какой аудитории мы будем заниматься и по каким дням?».

Доказательство по индукции

Профессор Нернст любил пересыпать свои лекции забавными историями, анекдотами и шутками. Нам, студентам, это очень нравилось, и я помню, что даже его помощник, заменяя профессора на лекциях, говорил: «Здесь профессор Нернст рассказывает такую-то историю».

Обсуждая первый и второй законы термодинамики, Нернст обычно говорил: «Как вы помните, **первый** фундаментальный закон термодинамики был сформулирован и теоретически обоснован **тремя** физиками — Робертом Майером, Джеймсом Прескотом Джоулем и Германом фон Гельмгольцем; **второй** закон термодинамики был сформулирован **двумя** великими физиками — Рудольфом Клаузиусом и Вильямом Томсоном; **третий** закон я открыл самостоятельно. Это доказывает, что четвертого фундаментального закона термодинамики быть не может».

Эдгар В. Кучер

(Из книги "More Random Walks in Science", 1982, London, Institute of Physics)

Паули в раю

Вольфганг Паули славился способностью мгновенно проникать в суть теоретических построений своих коллег и находить в них ошибки и неясности. Неудивительно, что господь с нетерпением поджидал его в раю, куда Паули попал в 1958 г.

— Полагаю,— сказал господь,— в физике многое так и осталось непонятным для вас и вы непрочь узнать истину.

— Да, создатель,— ответил Паули.— Честно говоря, мне безумно надоели бесконечные заблуждения моих коллег. Меня, например, всю жизнь волновало, почему масса протона ровно в 1836,11 раз больше массы электрона, а заряды у них одинаковые. Откуда берется такое нелепое число? Наверняка этому есть какое-то объяснение. Однако, все теории, посвященные этой проблеме, не стоили и ломаного гроша.

— Ну что ж, вот объяснение, изложенное на привычном вам языке квантовой механики XX века,— сказал господь и протянул Паули пачку исписанных листов.

Тот жадно пробежал написанное, заглянул на первую страницу, потом на четвертую, и со вздохом вернул пачку:

— О боже, опять не то!

(Из книги А. Азимова «Сокровищница юмора», London, Woburn Press, 1971)

* * *

Работать с В. Паули было одно удовольствие. Ему можно было задать любой вопрос, не опасаясь, что он покажется глупым, потому что с его точки зрения все вопросы были глупыми.

(В. Вайскопф, American Journal of Physics, 1977, 45, 422) Переводы *О. Мацарской*

Фразы

Студенту-альпинисту Н. покорилась высота ВС.

* * *

Многие потоки информации впадают в реки забвения.

* * *

Какие могут быть счеты между компьютерами?

* * *

Самое приятное в доказательстве было то, что оно от противного.

* * *

Чем мельче истина, тем больше желающих ее доказать.

* * *

Сколько заблуждений приходится на каждую аксиому!

Е. Лапин

Информация

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

В ЗШ 5 отделений: математическое физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 9—10 классов ЗШ приглашается в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно - исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. Заявление необходимо оформить по следующему образцу:

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Обучение в течение одного года на одном отделении стоит 5 рублей. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для школьников, обучающихся в школах-интернатах, для детей-сирот и детей из многодетных семей (пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Оплату следует производить почтовым переводом на р/счет № 000141013 Советского отделения Сибирского коммерческого банка г. Новосибирска. В графе «вид платежа» напишите: «за обучение в ЗШ при НГУ». Квитанцию об оплате *вклейте в тетрадь с первым заданием*. Тетради без квитанции проверяться и возвращаться не будут.

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 «а»
Отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

В задании имеются задачи различной трудности. Поэтому для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным правильно решить одну-две задачи.

Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить.

Экспериментальная задача — одна для поступающих во все классы.

Измерьте величину отношения полезной энергии, пошедшей на доведение до кипения воды в электрическом чайнике или в кастрюле, нагреваемой на электроплитке, к израсходованной при этом электрической энергии. Электрические параметры чайника или плитки указаны на них, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\times10^3$ Дж/(кг·К).

Теоретические задачи

9 класс

1. Имея в розетке напряжение 220 В, хотят использовать для освещения электрическую лампочку, рассчитанную на напряжение 110 В, впаяв последовательно с лампочкой резистор. Во сколько раз сопротивление этого резистора должно превышать сопротивление горящей лампочки, чтобы она светила своим нормальным накалом?

2. Подвижная вертикальная перегородка образует в прямоугольном сосуде два прямоугольных отсека, в которых находится вода. Перегородка не пропускает воду из отсека в отсек. В начальный момент объем воды в каждом отсеке V. Какой объем воды нужно долить в правый отсек, чтобы расстояние между перегородкой и левой стенкой уменьшилось в 2 раза?

3. Человек держит один край длинной доски, второй ее край лежит на круглой бочке (рис. 1). Толкая доску, человек идет к бочке. Какое расстояние он пройдет, прежде чем приблизится к ней вплотную? Доска параллельна полу. Проскальзывание между доской и бочкой, а также между бочкой и полом отсутствует. Длина доски l.

4. Шар лежит на дне бассейна. Когда вода в бассейне достигает уровня, на котором находится центр шара, он давит на дно в 1,5 раза слабее, чем в момент, когда воды в бассейне не было. Определите плотность шара.

10 класс

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Поезд двигался от станции сначала с ускорением a, затем, после изменения тяги, он стал двигаться с отрицательным ускорением $-a$. Через время τ после начала движения поезд вернулся на станцию. Определите максимальное расстояние, на которое поезд удалялся от станции.

3. Вертикально взлетающий снаряд в момент остановки разрывается на множество осколков. Скорости осколков при взрыве равны u, ускорение свободного падения g. Определите промежуток времени, в течение которого осколки будут поражать землю. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Рис. 1.

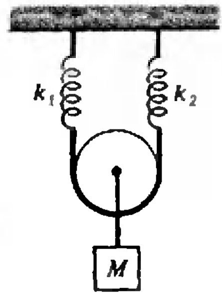


Рис. 2.

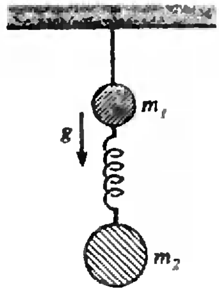


Рис. 3.

4. На неподвижный шар налетает другой шар. Найдите отношение масс шаров, если после абсолютно упругого удара они стали двигаться с одинаковыми по величине скоростями под углами α и β к направлению первоначального движения налетевшего шара.

5. Подвижный блок висит на нити, концы которой прикреплены к потолку с помощью двух невесомых пружин (рис. 2). Пружины параллельны друг другу, их жесткости равны k_1 и k_2. К блоку подвешивают тело массой M. Найдите величину смещения положения равновесия блока.

6. К потолку на невесомой нити подвешен шарик массой m_1 (рис. 3). К этому шарику на пружинке прикреплен другой шарик массой m_2. Найдите их ускорения в первый момент после того, как нить пережгут.

11 класс

1. Решите задачу 2 для 10 класса.

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. В трубке, один конец которой запаян, а другой закрыт поршнем, имеются два отсека объемом V каждый. Отсеки разделены закрепленной перегородкой с отверстием, закрытым пробкой, которая вылетает при перепаде давлений Δp. В обоих отсеках находится воздух под давлением p_0. Поршень медленно, не меняя температуру газа, выдвигают и сразу после вылета пробки останавливают. Найдите давление в трубке после вылета пробки, когда прекратится движение воздуха.

4. Тело с зарядом $-q$ и массой m располагают на расстоянии L от центра равномерно заряженной сферы, радиус которой R и заряд Q ($L>R$), и отпускают. Определите время пролета тела через сферу, если оно не теряет энергии, пролетая сквозь стенки сферы.

5. Частица с электрическим зарядом e и массой m влетает через небольшое отверстие в пластине вертикально расположенного плоского конденсатора со скоростью v, перпендикулярной пластине. Электрическое поле конденсатора возвращает частицу на пластину, но из-за наличия ускорения свободного падения g она попадает на пластину ниже входного отверстия на величину l. Определите напряженность электрического поля конденсатора.

6. В озере очень медленно всплывает пузы-

рек воздуха. У дна он имел радиус $R_1=1{,}5$ мм, у поверхности воды — $R_2=1{,}8$ мм. Определите глубину озера, пренебрегая изменением температуры воды с глубиной. Все недостающие данные можно взять из школьного учебника по физике.

Первое задание по математике

9 класс

1. Докажите, что для любого натурального числа n число $n/3+n^2/2+n^3/6$ — натуральное.
2. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько надо взять частей каждого сплава, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?
3. Решите неравенство
$$|x-1|+|x+1|<4.$$
4. Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, h — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Докажите, что треугольник со сторонами h, $c+h$, $a+b$ является прямоугольным.
5. Докажите, что сумма расстояний от какой-либо точки, взятой внутри правильного треугольника, до сторон этого треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки.

10 класс

1. Решите задачу 1 для 9 класса.
2. Решите задачу 2 для 9 класса.
3. Решите неравенство
$$\sqrt{x}\geqslant\sqrt{5}\left(x-\frac{2}{5}\right).$$
4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Вычислите длину биссектрисы прямого угла.
5. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=3$ см, $BC=7$ см и длина медианы BM равна 4 см.

11 класс

1. Докажите, что для любого нечетного натурального n число $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится на 512.
2. Решите задачу 3 для 10 класса.
3. Решите уравнение
$$3\cdot16^x+37\cdot36^x=26\cdot81^x.$$
4. Решите задачу 4 для 10 класса.
5. Решите задачу 5 для 10 класса.

Зимняя математико-физико-компьютерная школа в Нижнем Тагиле

Зима на Урале всегда холодная, а в этом году в конце января морозы были особенно сильны, да еще и с ветром. Но это не помешало сотне школьников Урала и их гостям из других городов Союза собраться в старинном русском мастеровом городе Нижнем Тагиле на первую межрегиональную математико - физико - компьютерную школу.

Ребята прослушали курсы лекций по математической лингвистике, проективной геометрии, топологии и другим современным математическим наукам, работали на персональных компьютерах, изучали физику с помощью новейших методик.

Конечно, жаль, что лыжникам не удалось посоревноваться в скорости бега по склонам Уральских гор, но математической олимпиаде и математическому бою между командами преподавателей и школьников мороз помешать был не в силах. На олимпиаде лучшие результаты показали Е. Брюхов, Н. Бродский (оба из Челябинска), С. Климов (Ижевск), С. Гетун (Киев). Математический бой с небольшим преимуществом выиграла команда преподавателей.

Успешному проведению школы организаторы во многом обязаны спонсорам: производственному объединению «Уралвагонзавод», пединституту, филиалу Уральского политехнического института, предоставившему компьютерные классы, и другим организациям.

Организаторы и участники школы разъезжались полные надежд, что эта первая школа не будет последней.

Б. Гельруд

Всесоюзная статистическая ассоциация

Положение со статистическими методами сейчас противоречивое. С одной стороны, в области теории статистических методов СССР всегда был на одном из первых мест в мире. С другой стороны, по масштабам внедрения статистических методов СССР отстает от США и Японии по крайней мере на один-два порядка, хотя примеров успешного применения этих методов на советских предприятиях достаточно.

Основная причина слабого внедрения статистических методов в СССР — отсутствие заинтересованности в них в условиях административно-командной системы. Почему в промышленно развитых странах применяют статистику? Вот мнение Каору Исикава: «Методы статистики — именно то средство, которое необходимо изучить, чтобы внедрить управление качеством. Они — наиболее важная составная часть комплексной системы всеобщего управления качеством на фирме. В японских корпорациях все от председателя Совета Директоров до рядового рабочего в цехе обязаны знать хотя бы основы статистических методов». В СССР о статистических методах знают пока лишь небольшие группы специалистов. Обычно со словом «статистика» ассоциируется Госкомстат, который на самом деле следовало бы назвать Госкомитетом по учету.

Но страна идет к рынку. Скоро потребность в применении современных статистических методов в СССР будет не меньше, чем в США и Японии. Значит, нужны широкая пропаганда, обучение в школах, вузах, институтах повышения квалификации, разработка и внедрение пакетов программ по современным статистическим методам.

Кому это делать? В стране имеется несколько тысяч специалистов, разбитых на мелкие группы, плохо связанных между собой, причем большая часть таких специалистов «скрывается» под другими названиями. В США специалистов по статистическим методам больше чем математиков, статистика как наука стоит в одном ряду с математикой, физикой, биологией. А у нас есть лишь дисциплина «статистика» в экономике и «математическая статистика» как часть математики. Статистические методы в промышленности, медицине используются, но как бы не существуют. Отсутствуют учебные курсы, в перечне ВАК нет «статистических наук», крайне мало журналов, трудно выпускать книги, находить финансирование для научно-исследовательских работ, отсутствует координация, система контроля за качеством работ по статистике, сертификация пакетов статистических программ и т. д.

Очевидно, необходимы специальные усилия по организации статистики и прежде всего статистических методов как единой области научной и практической деятельности, а для этого — объединение специалистов по статистике в рамках общественной организации. (Ясно, что еще одна бюрократическая структура типа Госкомитета по статистическим методам пользы не принесет.) Эту организацию предлагалось назвать Советским обществом статистиков, Статистической Федерацией СССР, Ассоциацией советских статистиков. Учредительный съезд, прошедший в октябре 1990 г. в Москве, принял название «Всесоюзная статистическая ассоциация».

В Уставе Ассоциации подчеркивается отказ от принуждения, рекомендательный характер решений органов Ассоциации, свобода формирования первичных и других организаций. Много внимания уделено обеспечению хозрасчетной деятельности, в частности, в рамках временных коллективов.

Кого объединила Ассоциация? Одна из двух основных групп — Центр статистических методов и информатики, неформальный коллектив, начавший свою деятельность как Рабочая группа по анализу стандартов по прикладной статистике и другим статистическим методам. В результате этого анализа 24 из 31 государственных стандартов по статистическим методам были отменены как содержащие грубые ошибки, устаревшие, излишне регламентирующие труд специалистов. С 1989 г. Центр разработал ряд диалоговых систем и пакетов по современным статистическим методам для персональных IBM-совместимых компьютеров: СРСМ, ЛИСАТИС, АРМ-АСПЕКТ, СПК, АТСТАТ-ПРП, КОМПЛАН, СТАТКОН, АВРОРА-РС, ЭКСПЛАН, ПАСЭК, ПЛАН, НАДИС, ДИСПИУС и другие.

С марта 1989 г. Центр статистических методов и информатики начал работу по созданию Всесоюзной статистической организации. В январе 1990 г. была учреждена Московская Статистическая Федерация.

Одновременно организационную работу вела группа преподавателей статистики в экономических вузах и сотрудников Госкомстата СССР по руководством доктора экономических наук В. М. Симчеры. При посредничестве Всесоюзного экономического общества в марте 1990 г. было достигнуто соглашение о создании единой организации при условии независимости входящих в нее секций.

На Учредительской конференции в Московском энергетическом институте в апреле 1990 г. была создана Всесоюзная организация по статистическим методам и их применениям. Она вошла как секция во Всесоюзную статистическую ассоциацию. В Ассоциации есть также секции работников Госкомстата, преподавателей статистики в экономических вузах, специальных статистических работ.

За более подробной информацией можно обращаться по адресу: 125252, Москва, ул. Зорге, 16, Всесоюзный центр статистических методов и информатики, ВСА. Тел.: 943-28-02, телекс: 411055 SNIO SU; факс: 120-13-20.

А. Орлов, вице-президент Всесоюзной статистической ассоциации

Ответы, указания, решения

[redacted]ловой тест

1. 48. (Сначала прибавить 2, потом 4, затем 8 и наконец 16.)
2. 24. (Числа возрастают на 2, 3, 4, 5, 6 против часовой стрелки.)
3. 80. (Из каждого числа вычитаем 33.)
4. 5. (Числа на поднятых «руках» положительны, а на опущенных — отрицательны, на «голове» дана их алгебраическая сумма: $+7-2=$ $=5$.)
5. 18. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В одном ряду числа возрастают на 4, в другом ряду — на 3.)
6. 154. (Удвоенная сумма чисел, стоящая вне скобок.)
7. 3. (Полуразность чисел второй и первой колонок.)
8. 86. (Числа удваиваются, а затем из них вычитаются 1, 2, 3, 4.)
9. 333. (Разность чисел, стоящих справа и слева от скобок.)
10. 35. (Числа в ряду возрастают на 1, 2, 4, 8, 16.)
11. 5. (Число на «голове» равно полусумме чисел на «ногах».)
12. 37. (Каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 5.)
13. 7. (Числа в третьей колонке равны полусумме чисел первой и второй колонок.)
14. 33. (Числа в ряду убывают на 16, 8, 4, 2, 1.)
15. 3. (Если двигаться по часовой стрелке, то числа все время возрастают в 3 раза.)
16. 14. (Число в скобках равно сумме чисел вне скобок, деленной на 50.)
17. 6. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В одном ряду числа уменьшаются на 3, в другом ряду — на 2.)
18. 4. (Сумма чисел в каждой строке равна 14.)
19. 18. (Каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 10.)
20. 3. (Имеются 3 убывающих ряда чисел. В первой строке числа уменьшаются на 3, во второй строке — на 2, в третьей — на 3.)
21. 18. (Удвоенное число противоположного сектора.)
22. 232. (Удвоенная разность чисел, стоящих справа и слева от скобок.)
23. 21. (Числа возрастают на 2, 4, 6, 8.)
24. 480. (Число в скобках равно удвоенному произведению чисел, стоящих вне скобок.)
25. 2. (В каждой строке третье число равно удвоенной разности первых двух чисел.)
26. 19. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В первом ряду числа возрастают на 3, 4, 5. Во втором ряду числа убывают на 2 и 3.)
27. 3. (Вычесть сумму чисел на второй и четвертой лапах из суммы чисел на первой и третьей лапах. В результате получится число на кончике хвоста.)
28. 77. (Число в скобках равно половине произведения чисел, стоящих вне скобок.)
29. 7. (Каждое последующее число равно половине предыдущего минус 2.)
30. 61. (Каждое последующее число равно сумме предыдущего с удвоенной разностью двух предшествующих. Так, $5-1=4$; $4\cdot 2=8$; $5+$ $+8=13$ и т. д.)
31. 11. (Удвоить число из противолежащего сектора и прибавить 1.)
32. 46. (Каждое последующее число равно удвоенному предыдущему плюс 2.)
33. 24. (Числа в ряду возрастают на 3, 5, 7, 9.)
34. 5. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В первом ряду числа увеличиваются на 2. Во втором ряду числа увеличиваются на 1.)
35. 518. (Число в скобках равно удвоенной разности чисел, стоящих вне скобок.)
36. 3. (Вычесть сумму чисел на «ногах» из суммы чисел на «руках». В результате получится число на «голове».)
37. 19. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В одном ряду числа увеличиваются на 5; в другом ряду — на 4.)
38. 152. (Если двигаться по часовой стрелке, то каждое последующее число равно удвоенному предыдущему плюс 2, 3, 4, 6.)
39. 40. (Числа во второй колонке равны удвоенным числам первой колонки плюс 1. Числа в третьей колонке равны удвоенным числам второй колонки плюс 2: $2\cdot 19+2=40$.)
40. $\frac{20}{26}$. (Числа в числителях увеличиваются на 3, 4, 5, 6. Числа в знаменателях увеличиваются на 4, 5, 6, 7.)
41. 66. (Если двигаться по часовой стрелке, то каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 2.)
42. 179. (Если двигаться по часовой стрелке, то каждое последующее число равно удвоенному предыдущему плюс 1, 3, 5, 7, 9.)
43. 64. (Возвести в квадрат число из противолежащего сектора.)
44. 111. (Число в скобках равно полуразности чисел, стоящих вне скобок.)
45. 297. (Разность между числами каждый раз удваивается; ее нужно поочередно прибавлять и вычитать из чисел ряда:
$857+112=969$; $969-112\cdot 2=745$; $745+112\times$ $\times 2\cdot 2=1193$; $1193-112\cdot 2\cdot 2\cdot 2=297$.)
46. 6. (Имеются два чередующихся ряда чисел. Оба представляют собой квадраты чисел плюс постоянная 2:

первый ряд:	0	3	9,	
квадраты:	0	9	81,	
плюс 2:	2	11	83,	
второй ряд:	5	4		и, следовательно, 2,
квадраты:	25	16		и, следовательно, 4,
плюс 2:	27	18		и, следовательно, 6.)

47. 55 и 100. (Число, стоящее справа от скобок, равно квадрату числа, стоящего слева от скобок. Число в скобках равно полусумме чисел вне скобок.)
48. 91. (В приведенном ряду разность между каждым последующим числом и предыдущим

возрастает на 6 и составляет соответственно 12, 18, 24, 30.

49. 581.

(Начнем с ряда чисел:	0	2	4	6,	следовательно, 8
умножим на 3:	0	6	12	18,	следовательно, 24,
возведем в квадрат:	0	36	144	324,	следовательно, 576,
прибавим 5:	5	41	149	329,	следовательно, 581.)

50. 6. (Число внутри кружка равно сумме чисел внутри углов треугольника минус числа, стоящие вне треугольника.)

[redacted]ант» для младших школьников
(«Квант» № 6)

1. 10 ящиков яблок, 12 ящиков груш, 14 коробок вишен и 10 коробок слив.

2. Может, например, в такой позиции, как на рисунке 1.

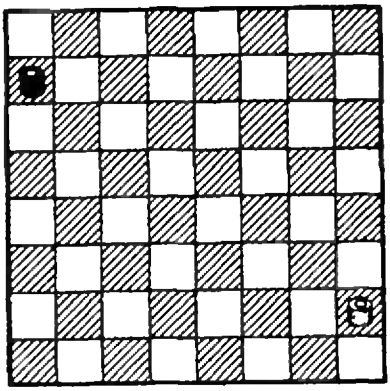


Рис. 1.

3. Имеется два решения (см. рис. 2).

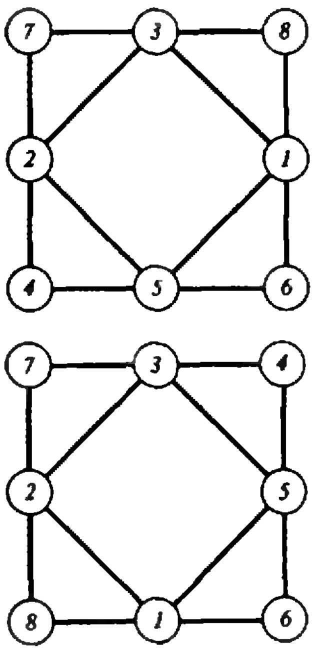


Рис. 2.

4. $14^4=196^2=38416$.

5. Вольтметр покажет 0, так как цепь незамкнута.

[redacted]урс «Математика 6—8»
(«Квант» № 4)

22. См. рис. 1.

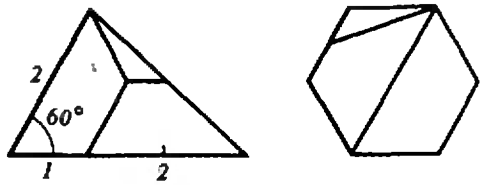


Рис. 1.

23. Выпишем факториалы первых 11 чисел: $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$, $7!=5040$, $8!=40\,320$, $9!=362\,880$, $10!=3\,628\,800$, $11!=39\,916\,800$. Очевидно, что сумма двух семизначных чисел может равняться лишь одному из написанных, а именно $10!=3\,628\,800$. Обозначим искомые числа через x и y, тогда $x+y=3\,628\,800$ и $x-y=k!$. Отсюда $x=(10!+k!)/2$, $y=(10!-k!)/2$. Выпишем значения для x, y и сумм их цифр S_x и S_y при возможных значениях k ($k<10$):

k	x	y	S_x	S_y
2	1814401	1814399	19	35
3	1814403	1814397	21	33
4	1814412	1814388	21	33
5	1814460	1814340	24	21
6	1814760	1814040	27	18
7	1816920	1794240	27	27
8	1834560	1794240	27	27
9	1995840	1632960	36	27

Замечаем, что из возможных значений S_x и S_y только S_x является факторналом, притом в единственном случае $k=5$. Получаем ответ: $x=1814460$, $y=1814340$.

24. Заметим следующий факт: сумма длин большего основания и одной из боковых сторон трапеции больше суммы длин меньшего основания и второй боковой стороны. Докажем этот факт. Обозначим длины оснований через a и b ($a>b$), а длины боковых сторон через c и d ($c\geqslant d$). Проведем отрезок BK параллельно стороне CD (рис. 2), тогда в треугольнике ABK стороны равны: $AB=d$, $BK=c$, $AK=a-b$. Из неравенства треугольника следует, что $AK>BK-AB$, т. е. $a-b>c-d$, или $a+d>b+c$. Так как $c\geqslant d$, то и $a+c>b+d$.

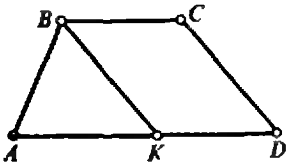


Рис. 2.

Пусть теперь $ABCD$ — трапеция с параллельными сторонами AB и CD и теми же длинами сторон. Тогда, в силу того, что это трапеция, мы имеем $c+a>b+d$ и $c+b>a+d$, но второе условие противоречит ранее выведенному условию $a+d>b+c$. Следовательно, предположение $a>b$ неверно и наша трапеция — параллелограмм.

[redacted]ейдоскоп «Кванта» («Квант» № 6)

Вопросы и задачи

1. $\Delta|m\vec{v}|=0$; $|\Delta(m\vec{v})|=2mv_0\sin\alpha$.
2. Изменение импульса воды при повороте объясняется действием силы со стороны трубы. С такой же по величине силой вода действует на трубу в сторону, противоположную изгибу трубы.
3. $v+2u$.
4. В первом случае лодка останется на месте, во втором — станет двигаться в направлении, обратном желаемому.
5. После соскальзывания тела B «горка» A с телом C поедет в противоположном направлении со скоростью, в два раза меньшей скорости тела B. После соскальзывания с движущейся «горки» тело C приобретает скорость бо́льшую, чем тело B. По закону сохранения импульса скорость «горки» должна быть направлена в сторону движения тела B.
6. Начальная скорость камня относительно воды будет меньше при бросании с лодки, поэтому камень полетит не так далеко, как если бы он был брошен с баржи.
7. Общий импульс частей ракеты до взрыва в высшей точке подъема и сразу после него остается постоянным и равным нулю. Векторы импульсов осколков могут в сумме дать нуль только тогда, когда они лежат в одной плоскости.
8. При упругом ударе.
9. Под прямым углом.
10. Аэростат станет опускаться.
11. Так как на стержень в горизонтальном направлении не действуют силы, то его центр тяжести будет двигаться вертикально, а нижний конец стержня сместится в сторону от этой вертикали.
12. Траектории жука и центра обруча будут представлять собой концентрические окружности с центром, совпадающим с неподвижным центром масс системы «жук — обруч».
13. Скорость ракеты будет увеличиваться. Если перейти к системе отсчета, относительно которой ракета в данный момент покоится, то будет ясно, что давление вытекающих газов по-прежнему толкает ракету вперед.
14. Да, если пол не абсолютно гладкий. Тогда, раскачиваясь на стуле, можно создать внешнюю силу за счет трения между стулом и полом.

Микроопыт

Шарик станет летать за счет «реактивного» истечения из него воздуха. При этом величина и направление скорости шарика будут меняться, так как истечение неравномерно.

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, Д. Крымов, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин, Г. Шиф

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф
Художественный редактор Е. Потапенкова
Зав. редакцией С. Давыдова
Корректор Л. Сомова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.04.91. Подписано к печати 11.06.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,98.
Тираж 85654 экз. Заказ 698. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

РЕКОРДЫ, РЕКОРДЫ...

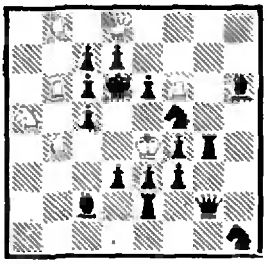
Шахматная почта «Кванта» велика, и всякий раз, когда начинаешь ее анализировать, находится масса интересных идей, предложений, рекордов... Рассмотрим очередную порцию рекордных позиций.

Самый быстрый мат при условии, что обе стороны к этому стремятся и притом совершают наидлиннейшие ходы, придумал Н. Жарков из Ростова. **1. Kf3 Kf6.** По теореме Пифагора ход конем длиннее, чем движение пешки на два поля вперед. **2. Kd4 Kd5 3. Ke6 Kf4 4. K:f8 Kg6 5. Ke6 Kf8 6. K:g7×.** Решение, конечно, допускает различные перестановки ходов.

Если запретить коням ставить мат, то придется проявить больше изобретательности. Вот что предложил Б. Зайцев из Морозовска. **1. Kf3 Kf6 2. Kg5 Kd5 3. K:h7 Kb6 4. K:f8 Л:h2 5. Ke6 Лh8 6. Л:h8×.**

И. Верещагин из Подмосковья тоже поставил самый быстрый мат, но уже при условии, что ходы — наикратчайшие. **1. e3 a6 2. e4 a5 3. Kpe2 a4 4. Kpe3 a3 5. Kpf3 e6 6. Kpf4 e5+ 7. Kpf5 d6×.** Короли и пешки двигались на одно поле по прямой, короче ходов не бывает. Интересно, могут ли так же быстро получить мат черные?

И. Верещагин прислал нам еще одну занятную позицию.



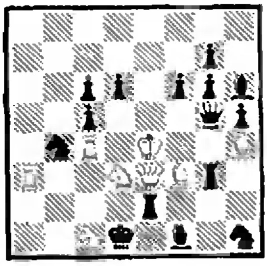
Кто дает больше матов?

Произведем расчет. Кажется, что у белых 4 способа поставить мат (C:c7×, Л:c6×, Kc4×, Kb7×), а у черных — 5 (Kfg3×, Kf2×, Khg3×, d2×, f2×). Итак, перевес на стороне черных? Отнюдь нет. Если внимательно посмотреть на диаграмму, то можно заметить, что на доске девять черных пешек вместо 8, и стало быть, одну из них следует убрать. При этом какую бы пешку ни снять с доски, возникнет матовая позиция. В результате счет уже оказывается в пользу белых: 5 раз они дают мат и 4 — черные. Все маты легальные.

В. Хуторной из Твери — автор множества оригинальных задач, вот его новое изобретение. Расставьте на доске черные и белые фигуры, как будто бы вы собирались сыграть с кем-то партию. А теперь скажите, сколько существует различных позиций, которые могут предшествовать этой?

Ясно, что белые и черные кони свободно маневрируют по доске (некоторой свободой пользуются и ладьи), а затем благополучно возвращаются домой. Скрупулезный подсчет показывает, что всего существует 22709863 различных позиций, из которых может возникнуть исходное расположение фигур. Не верите — проверьте сами!

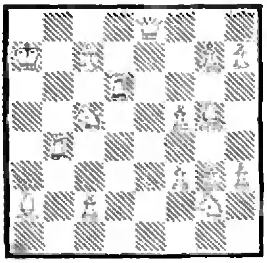
Довольно интересную задачу придумал П. Сотников из Бугульмы.



Обратный мат в 4 хода

Напомним, что такое задание означает, что белые заставляют черных дать мат, хотя те не стремятся к этому. **1. Kb2+ Kpe1 2. Kcd3+ K:d3 3. Лa1+ Kc1 4. Cg2.** И что же мы теперь видим? У черных 7 ходов ферзем, 1 — ладьей, 1 — слоном, 1 — конем и 2 — пешками. Всего 12 ходов, и каждый из них матует! Редкий случай цугцванга в задаче на обратный мат.

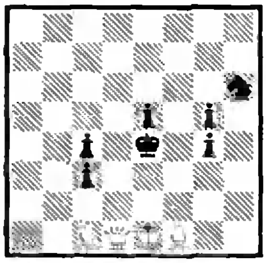
Специально для «Кванта» прислал свою головоломку известный шахматный композитор Р. Тавариани (Тбилиси). Расставить на доске 16 фигур одного цвета (полный комплект) таким образом, чтобы во-первых, они не защищали друг друга, и, во-вторых, 9 пустых полей не были атакованы фигурами.



Данная позиция удовлетворяет обоим требованиям. Не атакованы здесь поля a1, a3, a5, c3, f1, f2, g1, h1, h2. А вот еще одна позиция, придуманная автором: Kph4, Фc8, Лd3, Лe5, Ca4, Cb4, Kb1, Kg1, п. п. a2, b2, f2, f7, g2, g7, h2, h7. Не атакованы поля a1, a7, b6, f1, f4, f6, g6, h1, h6.

Может быть, читателям удастся побить этот рекорд, увеличив число неатакованных полей!?

В свое время мы публиковали на «шахматной страничке» множество задач на тему «все на местах» — в начальной позиции фигуры белых находятся на своих исходных полях. В. Александров из г. Иваново придумал позицию, в которой белые фигуры занимают исходные места не только в начале игры, но и в конце!



Мат в 4 хода

1. Фd7! Угрожает 2. Cg2×. 1...Kpf3 2. Фd5+ e4 (2...Kpg3 3. Фg2+ Kph4 4. Фh2×) **3. Фd4.** Теперь грозит 4. Фe3, Фf2×. 3...g3 **4. Фd1×!**

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

В Японии появилась еще одна головоломка. Она состоит из 6 прозрачных пластинок, на которых в разных местах нарисованы цветные полоски (в японском варианте это комплект из 6 розеток для варенья).

Требуется положить розетки друг на друга так, чтобы, посмотрев на стопку сверху, можно было увидеть квадрат, составленный из 9 разноцветных квадратиков.

Головоломка очень трудная, поэтому мы сразу приводим ее решение. Даже глядя на картинку и перекладывая пластинки, нелегко найти правильную последовательность их расположения.

Эту игрушку проще всего сделать из кусочков полиэтиленовой пленки, наклеив на нее в нужных местах полоски цветной бумаги.